

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Исследование дискретной динамической системы “хищник–жертва” с учетом эффекта Олли <i>В. В. Андреев</i>	2
Многошаговая аппроксимация последовательности множеств достижимости линейной автономной управляемой системы с гарантированной точностью <i>Н. Б. Брусликина</i>	21
Синтез корректных алгоритмов в алгебраическом расширении одной П-модели алгоритмов классификации <i>О. М. Васильев</i>	29
Компьютерное моделирование эволюции тонкого плазменного жгута в цилиндрических координатах <i>И. В. Дьяченко</i>	35
Короткие асимптотические разложения для распределений с плотностями <i>А. А. Михайлова</i>	46
Гарантированное по исходам и рискам решение одной двухкритериальной динамической задачи <i>К. С. Сорокин</i>	51
Компьютерное моделирование взаимодействия сверхкороткого и сверхсильного лазерного импульса с плазмой <i>А. В. Суворов</i>	62
О построении множества разрешимости для гибридной системы с линейной структурой <i>П. А. Точилин</i>	73
Точные решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана в задаче управления движением математического маятника, находящегося под воздействием пуассоновских и гауссовских случайных возмущений <i>Е. С. Чумерина</i>	83
Рефераты	98

---

---

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ “ХИЩНИК–ЖЕРТВА” С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОЛЛИ

© 2005 г. В. В. Андреев

**1. Постановка задачи. Фазовый и параметрический портрет системы.** Рассмотрим дискретную динамическую систему “хищник–жертва”, описывающую динамику численностей двух взаимодействующих популяций, каждая из которых характеризуется непрерывающимися последовательными поколениями:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t e^{r(1-\frac{x_t}{k})(x_t-l)} e^{-ay_t}, \\ y_{t+1} = x_t(1 - e^{-ay_t}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x_t$  — численность популяции некоторого вида в момент времени  $t$ , представляющего пищу для другого вида, численности  $y_t$ ;  $r$ ,  $l$ ,  $k$  и  $a$  — положительные параметры системы,  $l < k$ .

Изучаемая система входит в важную группу математических моделей, поведение решений которых обладает так называемым эффектом Олли, заключающемся в том, что биологические популяции хищников и жертв вымирают, если общая численность популяции жертв опускается ниже некоторого порогового значения. Ранее подобные системы изучались без учета эффекта Олли [14].

Для упрощения математического описания введем новые безразмерные переменные и параметры  $x'_t = ax_t$ ,  $y'_t = ay_t$ ,  $r' = \frac{r}{a^2k}$ ,  $k' = ak$ ,  $l' = al$ . Далее для простоты штрихи у безразмерных переменных и параметров будем отбрасывать. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t e^{r(x_t-l)(k-x_t)} e^{-y_t}, \\ y_{t+1} = x_t(1 - e^{-y_t}). \end{cases} \quad (2)$$

Ограничения на параметры системы (2) остаются такими же как у исходной системы:  $0 < l < k$ ,  $r > 0$ .

В системе (2) всегда существуют три тривиальные неподвижные точки:  $(0, 0)$ ,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$ . Нетривиальные неподвижные точки задаются следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} r(x-l)(k-x)/x = 1 - e^{-r(x-l)(k-x)}, \\ y = r(x-l)(k-x). \end{cases}$$

Устойчивость тривиальных неподвижных точек легко поддается аналитическому исследованию, в то время как для определения характера нетривиальных неподвижных точек необходимо использовать численное моделирование.

Численный анализ показывает, что в системе в зависимости от параметров  $r$ ,  $l$  и  $k$  могут дополнительно существовать одна или две нетривиальные неподвижные точки. На плоскости параметров  $k$  и  $l$  (при различных фиксированных значениях  $r$ ) было найдено значение  $k_0$  параметра  $k$  и соответствующая кривая  $l(k)$  ( $k \geq k_0$ ,  $l(k_0) = 1$ ), которая определяет области существования нетривиальных неподвижных точек. Установлено, что одна нетривиальная неподвижная точка существует при  $0 < l < 1$ ,  $k > 1$ , при  $l = 1$ ,  $k \geq k_0$ , а также при значениях параметров  $k$  и  $l$ , принадлежащих кривой  $l(k)$ ,  $k \geq k_0$  (значение  $r$  — произвольное, фиксированное). Две нетривиальные неподвижные точки существуют при  $1 < l < l(k)$ ,  $k > k_0$ . Анализ показывает, что при фиксированном значении параметра  $r$  кривая  $l(k)$  является единственной и представляет возрастающую функцию параметра  $k$ .

Неподвижная точка  $(0, 0)$  всегда является аттрактором. В неподвижной точке  $(l, 0)$  собственные значения матрицы Якоби системы (2) равны  $\mu_1 = 1 + rl(k-l)$ ,  $\mu_2 = l$ . Следовательно,

Таблица 1. Описание характера неподвижных точек системы

	$(l, 0)$	$(k, 0)$	$(x_1^*, y_1^*)$	$(x_2^*, y_2^*)$
1	седло	аттрактор	—	—
1a	седло	седло	—	—
2	репеллер	седло	—	—
2a	репеллер	репеллер	—	—
3	седло	седло	аттрактор	—
3a	седло	репеллер	аттрактор	—
3b	репеллер	репеллер	аттрактор	седло
4	седло	седло	репеллер	—
4a	седло	репеллер	репеллер	—
4b	репеллер	репеллер	репеллер	седло
5a	седло	репеллер	седло	—
5b	репеллер	репеллер	седло	седло

при  $l < 1$  неподвижная точка  $(l, 0)$  является седлом, а при  $l > 1$  — репеллером. В неподвижной точке  $(k, 0)$  собственные значения матрицы Якоби системы (2) равны  $\mu_1 = 1 - rk(k - l)$ ,  $\mu_2 = k$ . Поэтому при  $0 < k < 1$ ,  $\max\{0, k - \frac{2}{rk}\} < l < k$  неподвижная точка  $(k, 0)$  является аттрактором, а при  $k > \max\{1, \sqrt{\frac{2}{r}}\}$ ,  $0 < l < k - \frac{2}{rk}$  — репеллером. Если  $r > 2$ ,  $\sqrt{\frac{2}{r}} < k < 1$ ,  $0 < l < k - \frac{2}{rk}$ , а также если  $k > 1$ ,  $\max\{0, k - \frac{2}{rk}\} < l < k$  ( $r$  — произвольное), то неподвижная точка  $(k, 0)$  является седлом.

Численным моделированием установлено, что первая нетривиальная неподвижная точка (обозначим ее через  $(x_1^*, y_1^*)$ ) может быть как аттрактором, так репеллером и седлом, а вторая нетривиальная неподвижная точка (обозначим ее через  $(x_2^*, y_2^*)$ ,  $x_2^* < x_1^*$ ) всегда является седлом.

Полученную информацию об областях существования неподвижных точек и их характере сведем в параметрический портрет системы, разбив области значений параметров на плоскости  $k, l$  в области, в каждой из которых неподвижные точки системы сохраняют свой характер. При этом полагаем, что величина третьего параметра  $r$  остается постоянной. На рисунках 1, 2, 3, 4, 5, 6 представлены параметрические портреты для значений параметра  $r = 0.8, r \approx 1.09, r = 1.2, r = 2, r \approx 2.63, r = 3$  соответственно. Характер неподвижных точек в каждой области параметрического портрета (кроме неподвижной точки  $(0, 0)$ , которая всегда является аттрактором) описан в таблице 1.

Области на параметрических портретах системы обозначены арабскими цифрами. Римскими цифрами обозначены бифуркационные кривые, т.е. такие кривые в плоскости  $k, l$ , при пересечении которых фазовый портрет системы меняет свой характер. Вне зависимости от параметра  $r$  можно выделить шесть бифуркационных кривых:

- I — бифуркационная кривая, определяющая переход нетривиальной неподвижной точки  $(x_1^*, y_1^*)$  из аттрактора в репеллер;
- II — бифуркационная кривая, определяющая переход нетривиальной неподвижной точки  $(x_1^*, y_1^*)$  из репеллера или аттрактора в седло;
- III — кривая  $l(k)$  (см. с. 2) для неподвижных точек  $(x_1^*, y_1^*)$  и  $(x_2^*, y_2^*)$ ;
- IV — кривая  $l = k - \frac{2}{rk}$  для неподвижной точки  $(k, 0)$ ; а также полупрямые  $k = 1$  и  $l = 1$  для неподвижных точек  $(k, 0)$  и  $(l, 0)$  соответственно.

Приведенный параметрический портрет системы в зависимости от значения параметра  $r$  имеет следующие характерные особенности. При значении  $r < 1.09$  бифуркационные кривые I и II не имеют общих точек, при  $r \gtrsim 1.09$  эти кривые имеют единственную общую точку. При значении  $r < 2$  бифуркационные кривые II и IV не имеют общих точек, при  $r \gtrsim 2$  у этих кривых возникает единственная общая точка. И наконец, при  $r \approx 2.63$  бифуркационная кривая I пересекает полупрямую  $l = 1$ .

**Рис. 1.** Параметрический портрет,  $r=0.8$ .

**Рис. 2.** Параметрический портрет,  $r\approx 1.09$ .

**Рис. 3.** Параметрический портрет,  $r=1.2$ .

**Рис. 4.** Параметрический портрет,  $r=2.0$ .

**Рис. 5.** Параметрический портрет,  $r\approx 2.63$ .

**Рис. 6.** Параметрический портрет,  $r=3.0$ .

Для всех областей параметрического портрета системы будем строить соответствующие фазовые траектории, которые полностью описывают поведение биологических популяций внутри каждой области параметрического портрета. В областях 1, 1а, 2 и 2а существуют только тривиальные неподвижные точки:  $(0, 0)$ ,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$ . В областях 3, 3а, 4, 4а и 5а дополнительно существует единственная нетривиальная неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$ , а в областях 3b, 4b и 5b нетривиальных неподвижных точек две —  $(x_1^*, y_1^*)$  и  $(x_2^*, y_2^*)$ .

В области 1 (рис. 7) неподвижные точки  $(0, 0)$  и  $(k, 0)$  — аттракторы,  $(l, 0)$  — седло. Показатели Ляпунова, характеризующие аттрактор  $(k, 0)$ , отрицательны  $h_2 < h_1 < 0$ . В этой области происходит вымирание хищников, при этом жертвы либо также вымирают, либо их численность стремится к постоянному значению  $k$ .

В области 1а (рис. 8 и 9) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$  — седла. В данной области возникает тривиальный  $(y_t = 0)$  цикл длиной 2:  $(x^1, 0)^T \rightarrow (x^2, 0)^T$  (на рисунках этот цикл отмечен кружочками). Цикл может быть как устойчивым (рис. 8), так и седловым (рис. 9). В случае седлового цикла в системе возникает тривиальный  $(y_t = 0)$  хаотический аттрактор (реже тривиальный устойчивый длиннопериодичный цикл). Показатели Ляпунова, характеризующие тривиальный устойчивый цикл, отрицательны  $h_2 < h_1 < 0$ , а показатели Ляпунова, характеризующие тривиальный хаотический аттрактор, положительны  $h_1 > h_2 > 0$ . При значениях параметров системы из данной области происходит вымирание хищников, при этом жертвы либо также вымирают, либо их численность изменяется в соответствии с циклом длиной 2 (или длиннопериодичным циклом) или хаотическим образом.

В области 2 (рис. 10) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  — репеллер,  $(k, 0)$  — седло; а в области 2а (рис. 11) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$  — репеллеры. В этих областях также происходит вымирание хищников и жертв.

В области 3 (рис. 12) неподвижные точки  $(0, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  — аттракторы,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$  — седла; в области 3а (рис. 13) неподвижные точки  $(0, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  — аттракторы,  $(l, 0)$  — седло,  $(k, 0)$  — репеллер; в области 3b (рис. 14) неподвижные точки  $(0, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  — аттракторы,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$  — репеллеры,  $(x_2^*, y_2^*)$  — седло. Показатели Ляпунова, характеризующие аттрактор  $(x_1^*, y_1^*)$ , отрицательны  $h_2 < h_1 < 0$ . В этих областях либо происходит вымирание хищников и жертв, либо их численности стремятся к постоянным значениям (неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$ ).

В области 4 (рис. 15) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$  — седла,  $(x_1^*, y_1^*)$  — репеллер; в области 4а (рис. 16) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  — седло,  $(k, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  — репеллеры; в области 4b (рис. 17) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$ ,  $(k, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  — репеллеры,  $(x_2^*, y_2^*)$  — седло; в области 5а (рис. 18) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  — седла,  $(k, 0)$  — репеллер; в области 5b (рис. 19) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  и  $(k, 0)$  — репеллеры,  $(x_1^*, y_1^*)$  и  $(x_2^*, y_2^*)$  — седла. Во всех этих областях происходит вымирание хищников и жертв.

Остановимся подробнее на нетривиальной неподвижной точке  $(x_1^*, y_1^*)$  в том случае, когда она является аттрактором. При изучении аттракторов динамических систем большое значение имеет исследование их областей притяжения. В рассматриваемой дискретной системе (2) наибольший интерес представляют области притяжения нетривиальной неподвижной точки  $(x_1^*, y_1^*)$  при значениях параметров  $k$  и  $l$ , принадлежащих области 3b параметрического портрета системы. В областях 3 и 3а области притяжения неподвижной точки  $(x_1^*, y_1^*)$  достаточно просты (рис. 20). А в области 3b на область притяжения неподвижной точки  $(x_1^*, y_1^*)$  оказывает влияние седловая неподвижная точка  $(x_2^*, y_2^*)$ . На рисунках 21 и 22 приведены примеры областей притяжения нетривиальной неподвижной точки  $(x_1^*, y_1^*)$ . Как видно из рисунков, области притяжения аттрактора имеют достаточно сложную структуру.

**2. Исследование бифуркаций системы.** Решающее значение в изучении поведения системы играет исследование ее бифуркаций, так как при изменении параметров системы, проходящих через бифуркационные кривые, ее поведение претерпевает радикальные изменения. Среди бифуркаций системы (2) особое место занимают сильные резонансы. Далее доказано, что в системе возможно существование сильных 1:2, 1:3 и 1:4 резонансов. Сильный 1:2 резонанс наблюдается в системе, если неподвижная точка имеет собственные значения матрицы Якоби

**Рис. 7.** Область 1.

**Рис. 8.** Область 1а.

**Рис. 9.** Область 1а.

**Рис. 10.** Область 2.

**Рис. 11.** Область 2а.

**Рис. 12.** Область 3.

**Рис. 13.** Область 3а.

**Рис. 14.** Область 3б.

**Рис. 15.** Область 4.

**Рис. 16.** Область 4а.

**Рис. 17.** Область 4б.

**Рис. 18.** Область 5а.

**Рис. 19.** Область 5б.

**Рис. 20.** Область притяжения  $(x_1^*, y_1^*)$ .

Рис. 21. Область притяжения  $(x_1^*, y_1^*)$ .Рис. 22. Область притяжения  $(x_1^*, y_1^*)$ .

$\mu_{1,2} = -1$ . Сильный 1:3 резонанс возникает в неподвижной точке с собственными значениями  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$ . А сильный 1:4 резонанс имеет место, когда собственные значения  $\mu_{1,2} = \pm i$ . Исследование сильных резонансов основано на методике, описанной в [12]. При этом для сильного 1:2, 1:3 или 1:4 резонанса исходную дискретную систему (2) приводят к нормальной форме, а затем соответствующую итерацию нормальной формы аппроксимируют потоком дифференциальной системы. Доказано [12], что поведение этой дифференциальной системы дает возможность изучить поведение исходной системы около точки сильного резонанса. Характерной чертой сильных 1:2, 1:3 и 1:4 резонансов является тот факт, что у исходной системы около точки соответствующего резонанса существуют нетривиальные циклы длиной 2, 3 или 4.

Сильные резонансы возникают в системе на бифуркационной кривой I (на этой кривой неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  имеет собственные значения  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ). На данной кривой при увеличении значения параметра  $k$  последовательно возникают сильные 1:4, 1:3 и 1:2 резонансы, причем последний появляется в точке пересечения бифуркационных кривых I и II. Возникновение сильных резонансов зависит от значения параметра  $r$  следующим образом: при  $r \lesssim 0.897$  на кривой I нет резонансов; при  $0.897 \lesssim r \lesssim 1.01$  на кривой I существует только 1:4 резонанс; при  $1.01 \lesssim r \lesssim 1.09$  на кривой I возникают 1:4 и 1:3 резонансы; при  $r \gtrsim 1.09$  на кривой I всегда существуют 1:4, 1:3 и 1:2 резонансы. Так, при  $r = 2$  на бифуркационной кривой I имеют место точки A, B и C (рис. 4), в которых в системе соответственно возникают сильные 1:2, 1:3 и 1:4 резонансы. Следует заметить, что при любом фиксированном  $r$  бифуркационная кривая I при  $l \rightarrow 1-$ ,  $k \rightarrow 1+$  стремится к точке  $(k, l) = (1, 1)$ . При этом неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*) \rightarrow (l, 0) = (k, 0) = (1, 0)$  имеет собственные значения  $\mu_{1,2} \rightarrow 1$  (сильный 1:1 резонанс). Было установлено, что данный случай сильного 1:1 резонанса является вырожденным. Перейдем к сильному 1:2 резонансу.

**3. Сильный 1:2 резонанс.** Рассмотрим произвольное гладкое плоскостное отображение

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

имеющее при  $\alpha = 0$  неподвижную точку  $x = 0$  с собственными значениями  $\mu_{1,2} = -1$  (сильный 1:2 резонанс). Заметим, что исходную систему (2) нетрудно привести к данному виду, сделав линейную замену переменных и параметров, которая переводит нетривиальную неподвижную точку и параметры в начало координат. Предполагая, что  $x = 0$  является неподвижной точкой для всех достаточно малых  $\|\alpha\|$ , запишем отображение (3) в виде

$$x \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (4)$$

где  $A(\alpha)$  — матрица Якоби системы (3) в неподвижной точке  $x = 0$ , а  $F(x, \alpha) = f(x, \alpha) - A(\alpha)x = O(\|x\|^2)$ . Существуют два действительных линейно независимых вектора  $v_{0,1} \in \mathbb{R}^2$ :  $v_0$  — это собственный вектор матрицы  $A_0$  (через  $A_0$  обозначена  $A(0)$ ), соответствующий собственному значению  $-1$  ( $A_0 v_0 = -v_0$ ), а  $v_1$  — обобщенный собственный вектор  $A_0$ , соответствующий тому же самому собственному значению ( $A_0 v_1 = -v_1 + v_0$ ). Кроме того, существуют подобные сопряженные собственные векторы  $w_{0,1} \in \mathbb{R}^2$  транспонированной матрицы



$A_0^T : A_0^T w_1 = -w_1, A_0^T w_0 = -w_0 + w_1$ . Всегда можно подобрать данные четыре вектора так, что  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle = 1$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^2 : \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ . Тогда любой вектор  $x \in \mathbb{R}^2$  может быть однозначно представлен как  $x = y_1 v_0 + y_2 v_1$ , где новые координаты  $(y_1, y_2)$  могут быть явно вычислены как  $y_1 = \langle x, w_0 \rangle, y_2 = \langle x, w_1 \rangle$ .

В координатах  $(y_1, y_2)$  отображение (4) имеет форму:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 + a(\alpha) & 1 + b(\alpha) \\ c(\alpha) & -1 + d(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(y, \alpha) \\ h(y, \alpha) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $a(\alpha) = \langle [A(\alpha) - A_0]v_0, w_0 \rangle, b(\alpha) = \langle [A(\alpha) - A_0]v_1, w_0 \rangle,$   
 $c(\alpha) = \langle [A(\alpha) - A_0]v_0, w_1 \rangle, d(\alpha) = \langle [A(\alpha) - A_0]v_1, w_1 \rangle,$   
 $g(y, \alpha) = \langle F(y_1 v_0 + y_2 v_1, \alpha), w_0 \rangle, h(y, \alpha) = \langle F(y_1 v_0 + y_2 v_1, \alpha), w_1 \rangle.$

Невырожденное линейное преобразование  $y = B(\alpha)u$  преобразует отображение (5) для достаточно малых  $\|\alpha\|$  в отображение

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \varepsilon(\alpha) & -1 + \delta(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + B^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} g(B(\alpha)u, \alpha) \\ h(B(\alpha)u, \alpha) \end{pmatrix} \quad (6)$$

с  $\varepsilon(\alpha) = c(\alpha) + b(\alpha)c(\alpha) - a(\alpha)d(\alpha), \delta(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha), B(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + b(\alpha) & 0 \\ -a(\alpha) & 1 \end{pmatrix}$ . Обозначим  $\beta_1 = \varepsilon(\alpha), \beta_2 = \delta(\alpha)$  и запишем отображение (6) в виде

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \beta_1 & -1 + \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G(u, \beta) \\ H(u, \beta) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $G, H = O(\|u\|^2)$ . Заметим, что  $G(u, 0) = g(u, 0), H(u, 0) = h(u, 0)$ .

Нормальная форма отображения (7) для сильного 1:2 резонанса для всех достаточно малых  $\|\alpha\|$  имеет вид [12]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \beta_1 & -1 + \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C(\beta)\xi_1^3 + D(\beta)\xi_1^2\xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^4), \quad (8)$$

где  $C$  и  $D$  — гладкие функции  $\beta$ :

$$C(0) = h_{30}(0) + g_{20}(0)h_{20}(0) + \frac{1}{2}h_{20}^2(0) + \frac{1}{2}h_{20}(0)h_{11}(0), \quad (9)$$

$$D(0) = h_{21}(0) + 3g_{30}(0) + \frac{1}{2}g_{20}(0)h_{11}(0) + \frac{5}{4}h_{20}(0)h_{11}(0) + h_{20}(0)h_{02}(0) + 3g_{20}^2(0) + \frac{5}{2}g_{20}(0)h_{20}(0) + \frac{5}{2}g_{11}(0)h_{20}(0) + h_{20}^2(0) + \frac{1}{2}h_{11}^2(0). \quad (10)$$

Обозначим нормальную форму отображения (8) через  $\xi \mapsto \Gamma_\beta(\xi)$ . Следующая задача заключается в аппроксимации этого отображения потоком. В данном случае возможно аппроксимировать потоком только вторую итерацию  $\Gamma_\beta^2(\xi)$ . Для всех достаточно малых  $\|\beta\|$  вторая итерация отображения (8) может быть представлена в форме [12]:

$$\xi \mapsto \varphi_\beta^1(\xi) + O(\|\xi\|^4),$$

где  $\varphi_\beta^t$  — поток плоскостной системы, которая эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_1(\beta) & \gamma_2(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_1(\beta)\eta_1^3 + D_1(\beta)\eta_1^2\eta_2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

**Рис. 23.** Бифуркационная диаграмма системы (12) для  $s = -1$ .

где  $\gamma_1(\beta) = 4\beta_1 + O(\|\beta\|^2)$ ,  $\gamma_2(\beta) = -2\beta_1 - 2\beta_2 + O(\|\beta\|^2)$ ,  
 $C_1(0) = 4C(0)$ ,  $D_1(0) = -2D(0) - 6C(0)$ .

Пусть выполнены условия  $C_1(0) \neq 0$ ,  $D_1(0) \neq 0$  и  $D_1(0) < 0$ , тогда можно изменить масштаб переменных, параметров и времени в (11) и рассмотреть систему

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 = \varepsilon_1 \zeta_1 + \varepsilon_2 \zeta_2 + s \zeta_1^3 - \zeta_1^2 \zeta_2, \end{cases} \quad (12)$$

где  $s = \text{sign } C(0) = \pm 1$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — новые параметры.

Система (12) является аппроксимацией для системы (3) в неподвижной точке  $x = 0$  для всех достаточно малых  $\|\beta\|$ . Поэтому поведение системы (3) около неподвижной точки  $x = 0$  можно изучить по поведению системы (12). Численным моделированием для исходной системы (2) установлено выполнение невырожденных условий  $C_1(0) \neq 0$ ,  $D_1(0) \neq 0$  и  $D_1(0) < 0$ , а также вычислено значение  $s = -1$  (эти условия выполняются для всех возможных значений параметров  $r$ ,  $l$  и  $k$ , при которых возникает сильный 1:2 резонанс). Бифуркационная диаграмма аппроксимирующей системы (12) для  $s = -1$  представлена на рисунке 23. Разберем ее структуру подробнее.

Система (12) всегда имеет тривиальное положение равновесия  $E_0 = (0, 0)$ . Два других возможных положения равновесия расположены на горизонтальной оси  $\zeta_2 = 0$ :  $E_{1,2} = (\mp\sqrt{\varepsilon_1}, 0)$ . Они существуют при  $\varepsilon_1 > 0$  и возникают одновременно из тривиального равновесия посредством бифуркации типа вилки вдоль прямой  $F^{(1)} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = 0\}$ . В области 1 существует единственное тривиальное положение равновесия  $E_0$ , которое является устойчивой точкой (узлом или фокусом). Неподвижная точка подвергается невырожденной бифуркации Хопфа на полупрямой  $H^{(1)} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 < 0\}$ , в результате которой в области 2 возникает устойчивый предельный цикл. Два неустойчивых узла, которые позднее становятся фокусами, разветвляются из тривиального положения равновесия при пересечении верхней ветви прямой  $F^{(1)}$  из области 2 в область 3. На полупрямой  $H^{(2)} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = \varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0\}$  нетривиальные фокусы  $E_{1,2}$  одновременно подвергаются бифуркациям Хопфа. Эти бифуркации ведут к образованию двух “малых” неустойчивых (симметрично-спаренных) предельных циклов вокруг нетривиальных положений равновесия. Сами положения равновесия становятся устойчивыми. Таким образом, в области 4 существуют три предельных цикла: “большой” и два “малых”. Вдоль кривой  $P = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = \frac{4}{5}\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \varepsilon_1 > 0\}$  “малые” циклы исчезают посредством симметричной, в виде цифры восемь, гомоклинической бифуркации. Вдоль

Рис. 24. Область 1.

Рис. 25. Область 2.

этой кривой седло  $E_0$  имеет одновременно две гомоклинические траектории. Эти траектории трансформируются одна в другую путем симметричного преобразования. “Восьмерка” является нестабильной как внутри, так и снаружи. Пересечение кривой  $P$  из области 4 в область 5 имеет следствием не только разрушение “малых” циклов, но также возникновение неустойчивого “большого” предельного цикла. Таким образом, в области 5 существуют два “больших” цикла: внешний, являющийся устойчивым, и внутренний, неустойчивый. Эти два “больших” цикла сталкиваются и исчезают на кривой  $K = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = j_0\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \varepsilon_1 > 0\}$ , где  $j_0 = 0.752\dots$ . Происходит бифуркация седло–узел, после которой в системе не остается никаких предельных циклов. В области 6 существуют три положения равновесия: тривиальное седло и два устойчивых нетривиальных фокуса/узла. Нетривиальные положения равновесия сталкиваются с тривиальным в нижней ветви прямой  $F^{(1)}$  при возвращении обратно в область 1.

Полученные результаты можно интерпретировать сначала с точки зрения аппроксимирующего отображения  $\varphi_\varepsilon^1$ , а затем с точки зрения исходного отображения  $\Gamma_\beta$  около 1:2 резонанса. Пусть  $\varphi_\varepsilon^1$  — сдвиг на единицу времени вдоль орбит нормальной формы (12). Для этого отображения положения равновесия становятся неподвижными точками, бифуркация типа вилки сохраняет свое значение, в то время как бифуркация Хопфа становится бифуркацией Неймарка–Сакера, так как предельные циклы становятся замкнутыми инвариантными кривыми соответствующей устойчивости. Для отображения  $\Gamma_\beta$  тривиальная неподвижная точка  $\varphi_\varepsilon^1$  является неподвижной точкой, находящейся в начале координат, в то время как нетривиальные неподвижные точки соответствуют единственной траектории периода два. Таким образом бифуркация типа вилки становится бифуркацией удвоения периода, которую естественно ожидать около двойного собственного значения  $\mu_{1,2} = -1$ . У исходной системы существуют кривые бифуркации, аналогичные кривым  $F^{(1)}$ ,  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$ . Напротив, кривые, аналогичные гомоклиническим кривым  $P$  и  $K$ , не существуют в исходном отображении с общими членами высокого порядка. Вблизи данных кривых существует набор сложных бифуркаций, полное описание которых в настоящее время не исследовано.

Проанализируем поведение исходной системы около точки сильного 1:2 резонанса. На рисунках 24, 25, 26 и 27 представлены примеры поведения системы (2) в областях 1, 2, 3 и 6 (рис. 23) соответственно. В области 1 (рис. 24) нетривиальная неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  является аттрактором. В области 2 (рис. 25) вокруг данной неподвижной точки возникает устойчивая замкнутая инвариантная кривая, при этом сама неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  становится репеллером. В области 3 (рис. 26) неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  является седлом (изображена в центре рисунка), а также в системе существует нетривиальный неустойчивый цикл длиной 2. Неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  и цикл окружены устойчивой замкнутой инвариантной кривой. Переход из области 3 в область 6 в исходной системе (2) происходит очень быстро: примерно за 0.001 изменения значений параметров. Чтобы проследить этот переход, в качестве примера возьмем значения  $r = 2$ ,  $l = 0.765$  и посмотрим, как меняется состояние системы в зависимости от параметра  $k$ . При значении  $k \approx 2.8283$  система находится в области 2. Для  $k \approx 2.8284$  система попадает в область 3, а для  $k \approx 2.8292$  система попадает в область 4 или 5 (опре-

Рис. 26. Область 3.

Рис. 27. Область 6.

делить какая это область практически не возможно). В областях 4 и 5 неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  является седлом, имеет место нетривиальный устойчивый цикл длиной 2 и устойчивая замкнутая инвариантная кривая, а также существует одна (область 5) или две (область 4) неустойчивые замкнутые инвариантные кривые. И наконец, при значении  $k \approx 2.8295$  система находится в области 6 (рис. 27), в которой неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  является седлом и также существует устойчивый цикл длиной 2 (на рисунке цикл отмечен кружочками). Области 1, 2 и 6 рисунка 23 соответствуют областям 3а, 4а и 5а около точки пересечения бифуркационных кривых I и II (точка А) параметрического портрета системы, представленного на рисунке 4.

#### 4. Сильный 1:3 резонанс. Рассмотрим гладкое плоскостное отображение

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \quad (13)$$

имеющее при  $\alpha = 0$  неподвижную точку  $x = 0$  с простыми собственными значениями  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$  для  $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$  (сильный 1:3 резонанс). Пусть  $x = 0$  является неподвижной точкой отображения для всех достаточно малых  $\|\alpha\|$ . Запишем отображение (13) в виде

$$x \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha),$$

где  $A(\alpha)$  — матрица Якоби системы (13) в неподвижной точке  $x = 0$ , а  $F(x, \alpha) = f(x, \alpha) - A(\alpha)x = O(\|x\|^2)$ . Так как собственные значения простые, то здесь существует однозначный собственный вектор  $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ :  $A(\alpha)q(\alpha) = \mu(\alpha)q(\alpha)$  для всех малых  $\|\alpha\|$ , таких, что  $\mu(0) = e^{i\theta_0}$ . Введем сопряженный собственный вектор  $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ :  $A^T(\alpha)p(\alpha) = \bar{\mu}(\alpha)p(\alpha)$ , который нормализуем по отношению к  $q(\alpha)$  так, что  $\langle p, q \rangle = 1$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{C}^2$ :  $\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2$ . Любой вектор  $x \in \mathbb{R}^2$  может быть единственным образом представлен как  $x = zq + \bar{z}\bar{q}$  для некоторого комплексного  $z$  ( $z = \langle p, x \rangle$ ). Тогда изучаемое отображение может быть записано в комплексной форме

$$z \mapsto \mu(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (14)$$

где  $g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), f(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l$ ,

$$g_{kl}(\alpha) = \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), f(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \right|_{z=0}, \quad k+l \geq 2, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

Нормальная форма отображения (14) для сильного 1:3 резонанса для всех достаточно малых  $\|\alpha\|$  имеет вид [12]:

$$\zeta \mapsto \Gamma_\alpha(\zeta) = \mu(\alpha)\zeta + B(\alpha)\bar{\zeta}^2 + C(\alpha)\zeta|\zeta|^2 + O(|\zeta|^4), \quad (15)$$

При этом  $B(0)$  и  $C(0)$  вычисляются по формулам ( $\mu_0 = \mu(0) = e^{i\theta_0}$ ):

$$B(0) = \frac{g_{02}(0)}{2}, \quad C(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1 - 2\mu_0)}{2(\mu_0^2 - \mu_0)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\mu}_0} + \frac{g_{21}(0)}{2}. \quad (16)$$

Аппроксимируем отображение (15) потоком. Линейную часть  $\zeta \mapsto \mu(\alpha)\zeta$ , которая описывается поворотом на угол  $\frac{2\pi}{3}$  в  $\alpha = 0$ , несложно преобразовать. Запишем  $\mu(\alpha)$  в экспоненциальной форме:  $\mu(\alpha) = e^{\varepsilon(\alpha) + i\theta(\alpha)}$ , где  $\varepsilon(0) = 0$  и  $\theta(0) = \theta_0$ . Можно непосредственно проверить, что  $\zeta \mapsto \mu(\alpha)\zeta$  является сдвигом на единицу времени вдоль орбит линейного выражения  $\dot{\zeta} = \lambda(\alpha)\zeta$  для  $\lambda(\alpha) = \varepsilon(\alpha) + i\theta(\alpha)$ . В данном случае возможно аппроксимировать потоком только третью итерацию  $\Gamma_\alpha^3$ . Для всех достаточно малых  $\|\alpha\|$  третья итерация отображения (15) может быть представлена в форме [12]:

$$\Gamma_\alpha^3(\zeta) = \varphi_\alpha^1 \zeta + O(|\zeta|^4),$$

где  $\varphi_\alpha^t$  — поток плоскостной системы

$$\dot{\zeta} = \omega(\alpha)\zeta + B_1(\alpha)\bar{\zeta}^2 + C_1(\alpha)\zeta|\zeta|^2, \quad (17)$$

а  $\omega$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — гладкие комплекснозначные функции  $\alpha$ ,  $\omega(0) = 0$  и

$$B_1(0) = 3\bar{\mu}_0 B(0), \quad C_1(0) = -3|B(0)|^2 + 3\mu_0^2 C(0). \quad (18)$$

Рассмотрим действительную и мнимую части  $\omega$  в качестве новых параметров  $(\beta_1, \beta_2)$ :  $\omega(\alpha) = \beta_1(\alpha) + i\beta_2(\alpha)$ . Имеем,  $\beta_1(\alpha) = 3\varepsilon(\alpha)$ ,  $\beta_2(\alpha) = 3\theta(\alpha) \pmod{2\pi}$ . Запишем отображение (17) в виде

$$\dot{\zeta} = (\beta_1 + i\beta_2)\zeta + b_1(\beta)\bar{\zeta}^2 + c_1(\beta)\zeta|\zeta|^2, \quad (19)$$

где  $b_1(\beta) = B_1(\alpha(\beta))$ ,  $c_1(\beta) = C_1(\alpha(\beta))$ . Если комплексное число  $b_1(0) = B_1(0) \neq 0$ , то можно изменить масштаб, сделав замену  $\zeta = \frac{1}{|b_1(\beta)|} \exp\left(i\frac{\arg b_1(\beta)}{3}\right) \eta$ . Положим  $c(\beta) = \frac{c_1(\beta)}{|b_1(\beta)|^2}$ , тогда окончательно имеем следующую систему:

$$\dot{\eta} = (\beta_1 + i\beta_2)\eta + \bar{\eta}^2 + c(\beta)\eta|\eta|^2. \quad (20)$$

Записав (20) в полярных координатах  $\eta = \rho e^{i\varphi}$ , получим

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \beta_1 \rho + \rho^2 \cos 3\varphi + a(\beta)\rho^3, \\ \dot{\varphi} = \beta_2 - \rho \sin 3\varphi + b(\beta)\rho^2 \end{cases} \quad (21)$$

с гладкими действительными функциями  $a(\beta) = \operatorname{Re} c(\beta)$ ,  $b(\beta) = \operatorname{Im} c(\beta)$ . Пусть выполнено условие  $a(0) = \operatorname{Re} c(0) \neq 0$ .

Система (21) является аппроксимацией для системы (13) в неподвижной точке  $x = 0$  для всех достаточно малых  $\|\alpha\|$ . Поэтому поведение системы (13) около неподвижной точки  $x = 0$  можно изучить по поведению системы (21). Численным моделированием для исходной системы (2) установлено выполнение невырожденных условий  $b_1(0) \neq 0$  и  $a(0) \neq 0$ , а также условия  $a(0) < 0$  (эти условия выполняются для всех возможных значений параметров  $r$ ,  $l$  и  $k$ , при которых возникает сильный 1:3 резонанс). Бифуркационная диаграмма аппроксимирующей системы (21) для  $a(0) < 0$  представлена на рисунке 28.

Система (21) всегда имеет тривиальное положение равновесия  $E_0$  с  $\rho_0 = 0$ . Для всех достаточно малых  $\|\beta\| \neq 0$  существуют также три нетривиальных симметричных положения равновесия  $E_j = (\rho_s, \varphi_{s,j})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , которые расположены на окружности радиуса  $r_s^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + O(\|\beta\|^3)$  и разделены углом  $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$  в  $\varphi$ -координатах. Нетривиальные положения равновесия всегда представляют собой седла и не изменяют свой характер для малых  $\|\beta\| \neq 0$ . Тривиальное положение равновесия устойчиво при  $\beta_1 < 0$  и неустойчиво

**Рис. 28.** Бифуркационная диаграмма системы (21) для  $a(0) < 0$ .

**Рис. 29.** Область 1.

**Рис. 30.** Область 2.

при  $\beta_1 > 0$ , и подвергается суперкритической бифуркации Хопфа при  $\beta_1 = 0$ , обусловленной допущением  $a(0) < 0$ . Таким образом, единственный устойчивый предельный цикл появляется в (21), если пересекается линия бифуркации Хопфа  $N = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$  слева направо в точке с  $\beta_2 \neq 0$ . В силу выполнения невырожденных условий  $b_1(0) \neq 0$  и  $a(0) \neq 0$  можно доказать, что система (21) имеет не более одного предельного цикла для всех достаточно малых  $\|\beta\|$  [12]. Также доказывается, что существует бифуркационная кривая  $H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{a}{2}\beta_2^2 + o(\beta_2^2)\}$ , на которой предельный цикл исчезает посредством гетероклинической бифуркации. Для значений параметров, лежащих на кривой  $H$ , система имеет гетероклинический цикл, формируемый совпадением устойчивой и неустойчивой сепаратрис нетривиальных седел. Соединение всех трех седел происходит одновременно вследствие симметрии. Гетероклинический цикл образует треугольник, устойчивый внутри. Таким образом, предельный цикл существует в двух непересекающихся областях, смежных по отношению к линии  $N$ . Заметим, что траектории системы идут по спирали к или от начала координат в зависимости от знака  $\beta_2$  (см. второе уравнение в (21)). При  $\beta_2 = 0$  направление вращения вокруг начала координат меняется.

Интерпретируем полученные результаты для исходного отображения  $\Gamma_\alpha$  около сильно-

Рис. 31. Область 3.

го 1:3 резонанса. Отображение  $\Gamma_\alpha$  всегда имеет тривиальную неподвижную точку, подвергающуюся невырожденной бифуркации Неймарка–Сакера на бифуркационной кривой, соответствующей кривой Хопфа  $N$  в аппроксимирующей системе (21). Бифуркация Неймарка–Сакера рождает замкнутую инвариантную кривую, окружающую тривиальную неподвижную точку. Для всех значений параметров, достаточно близких к  $\alpha = 0$ , отображение  $\Gamma_\alpha$  имеет седловой цикл периода 3, соответствующий трем нетривиальным седловым неподвижным точкам  $\Gamma_\alpha^3$ , которые в свою очередь соответствуют седлам  $E_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  отображения (21). Вместо единственной гетероклинической бифуркационной кривой  $H$  отображение  $\Gamma_\alpha$  с общими членами более высокого порядка обладает сложным набором бифуркаций, полное описание которых в настоящее время не исследовано.

Проанализируем поведение исходной системы. На рисунках 29, 30 и 31 представлены примеры поведения системы (2) около точки сильного 1:3 резонанса. На рисунке 29 нетривиальная неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  является аттрактором, на рисунках 30 и 31 — репеллером, на рисунке 30 изображена устойчивая замкнутая инвариантная кривая. Во всех трех случаях в системе также имеет место седловой цикл длины 3 (на рисунках цикл отмечен кружочками). Следует заметить, что на рисунках 29 и 31 изображена единственная траектория системы, которая имеет такой вид за счет наличия седлового цикла.

**5. Сильный 1:4 резонанс.** Рассмотрим гладкое плоскостное отображение

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{22}$$

имеющее при  $\alpha = 0$  неподвижную точку  $x = 0$  с простыми собственными значениями  $\mu_{1,2}(0) = \pm i$  (сильный 1:4 резонанс). Произведя такие же рассуждения, как и в случае сильного 1:3 резонанса, получим следующую аппроксимирующую систему:

$$\dot{\eta} = (\beta_1 + i\beta_2)\eta + A(\beta)\eta|\eta|^2 + \bar{\eta}^3, \tag{23}$$

где  $A(\beta) = \frac{c_1(\beta)}{|d_1(\beta)|}$ . Определение коэффициентов  $c_1(\beta)$  и  $d_1(\beta)$  можно найти в [12]. Этот случай отличается от случая сильного 1:3 резонанса тем, что аппроксимация нормальной формы потоком возможна только для четвертой итерации отображения  $\Gamma_\alpha^4$ . Записав (23) в полярных координатах  $\eta = \rho e^{i\varphi}$ , получим

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \beta_1\rho + a(\beta)\rho^3 + \rho^3 \cos 4\varphi, \\ \dot{\varphi} = \beta_2 + b(\beta)\rho^2 - \rho^2 \sin 4\varphi \end{cases} \tag{24}$$

с гладкими действительнoзначными функциями  $a(\beta) = \text{Re } A(\beta)$ ,  $b(\beta) = \text{Im } A(\beta)$ . Пусть выполнены условия  $a(0) = \text{Re } A(0) \neq 0$ ,  $b(0) = \text{Im } A(0) \neq 0$ .

Система (24) является аппроксимацией для системы (22) в неподвижной точке  $x = 0$  для всех достаточно малых  $\|\alpha\|$ . Поэтому поведение системы (22) около неподвижной точки

**Рис. 32.** Бифуркационная диаграмма системы (24) для  $|A(0)| < 1$  и  $a(0) < 0$ .

$x = 0$  можно изучить по поведению системы (24). Численным моделированием для исходной системы (2) установлено выполнение невырожденных условий  $d_1(0) \neq 0$ ,  $a(0) \neq 0$  и  $b(0) \neq 0$ , а также условий  $|A(0)| < 1$  и  $a(0) < 0$ . Бифуркационная диаграмма аппроксимирующей системы (24) для  $|A(0)| < 1$  и  $a(0) < 0$  представлена на рисунке 32.

Система (24) всегда имеет тривиальное положение равновесия  $E_0$  с  $\rho_0 = 0$ . Для всех достаточно малых  $\|\beta\| \neq 0$  существуют также четыре нетривиальных симметричных положения равновесия  $E_j = (\rho_s, \varphi_{s,j})$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Нетривиальные положения равновесия всегда представляют собой седла и не изменяют свой характер для малых  $\|\beta\| \neq 0$ . Тривиальное положение равновесия устойчиво при  $\beta_1 < 0$  и неустойчиво при  $\beta_1 > 0$ , и подвергается суперкритической бифуркации Хопфа при  $\beta_1 = 0$ , обусловленной допущением  $a(0) < 0$ . Таким образом единственный устойчивый предельный цикл появляется в (24), если пересекается линия бифуркации Хопфа  $N = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0\}$  слева направо в точке с  $\beta_2 \neq 0$ . Можно показать, что существует бифуркационная кривая  $H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{a}{2}\beta_2^2 + o(\beta_2^2)\}$ , на которой предельный цикл исчезает посредством гетероклинической бифуркации. Для значений параметров на кривой  $H$  система имеет гетероклинический цикл, формируемый совпадением устойчивой и неустойчивой сепаратрис нетривиальных седел. Соединение всех четырех седел происходит одновременно вследствие симметрии. Гетероклинический цикл образует квадрат, устойчивый внутри. В итоге, предельный цикл существует в двух непересекающихся областях, смежных по отношению к линии  $N$ . Заметим, что траектории системы идут по спирали к или от начала координат в зависимости от знака  $\beta_2$  (см. второе уравнение в (24)). При  $\beta_2 = 0$  направление вращения вокруг начала координат меняется.

Интерпретируем полученные результаты для исходного отображения  $\Gamma_\alpha$  около сильно-го 1:4 резонанса. Отображение  $\Gamma_\alpha$  всегда имеет тривиальную неподвижную точку, подвергающуюся невырожденной бифуркации Неймарка–Сакера на бифуркационной кривой, соответствующей кривой Хопфа  $N$  в аппроксимирующей системе (24). Бифуркация Неймарка–Сакера рождает замкнутую инвариантную кривую, окружающую тривиальную неподвижную точку. Для всех значений параметров, достаточно близких к  $\alpha = 0$ , отображение  $\Gamma_\alpha$  имеет седловой цикл периода 4, соответствующий четырем нетривиальным седловым неподвижным точкам  $\Gamma_\alpha^4$ , которые в свою очередь соответствуют седлам  $E_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  отображения (24). Вместо единственной гетероклинической бифуркационной кривой  $H$  отображение  $\Gamma_\alpha$  с общи-



Рис. 33. Область 1.

Рис. 34. Область 2.

Рис. 35. Область 3.

ми членами более высокого порядка обладает сложным набором бифуркаций, которые соответствуют образованию сложной гетероклинической структуры. Замкнутая инвариантная кривая, рожденная бифуркацией Неймарка–Сакера, теряет свою гладкость и разрушается, как только приближается к данной гетероклинической структуре.

Проанализируем поведение исходной системы. На рисунках 33, 34 и 35 представлены примеры поведения системы (2) около точки сильного 1:4 резонанса. На рисунке 33 нетривиальная неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  является аттрактором, на рисунках 34 и 35 — репеллером, на рисунке 34 изображена устойчивая замкнутая инвариантная кривая (следует заметить, что на рисунках 33 и 35 изображена единственная траектория системы). Также во всех трех случаях в системе имеет место седловой цикл длиной 4 (на рисунках цикл отмечен кружочками).

**6. Другие бифуркации системы.** Как отмечалось ранее, на бифуркационной кривой I неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  имеет собственные значения  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ . При прохождении параметрами критических значений на кривой I в системе (2) реализуется суперкритическая бифуркация Неймарка–Сакера с рождением устойчивой замкнутой инвариантной кривой (за исключением точек сильных резонансов). Следует отметить, что в системе (2) отсутствует обобщенная бифуркация Неймарка–Сакера [12].

Интересно проследить, что происходит с устойчивой замкнутой инвариантной кривой (например, изображенной на рисунке 30) при изменении значений параметров в сторону удаления от бифуркационной кривой I. При разрушении этой инвариантной кривой вначале возникает устойчивый длиннопериодичный цикл (рис. 36), а затем хаотический аттрактор (рис. 37), для которого показатели Ляпунова  $h_2 < 0 < h_1$ .

На бифуркационной кривой II неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  имеет собственные значения  $\mu_1 < -1$ ,  $\mu_2 = -1$  (при переходе из репеллера в седло) или  $\mu_1 = -1$ ,  $-1 < \mu_2 < 1$  (при переходе из аттрактора в седло, что возможно при  $r \gtrsim 1.09$ ). В точке пересечения бифуркационных кривых II и I собственные значения  $\mu_1 = \mu_2 = -1$  (сильный 1:2 резонанс). Эта бифуркация является бифуркацией удвоения периода: справа от кривой II появляется нетривиальный цикл

**Рис. 36.** Длиннопериодичный цикл.

**Рис. 37.** Хаотический аттрактор.

**Рис. 38.** Длиннопериодичный цикл.

**Рис. 39.** Хаотический аттрактор.

**Рис. 40.** Область 3а.

**Рис. 41.** Область 5а.

длиной 2. При этом наблюдается следующая закономерность. Если при пересечении бифуркационной кривой II слева направо неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  переходит из аттрактора в седло, то справа от кривой II появляется устойчивый цикл длиной 2, который затем становится седловым. При удалении от кривой II вместе с седловым циклом вначале в системе появляется устойчивый длиннопериодичный цикл (рис. 38), а затем хаотический аттрактор (рис. 39). Квадратиком на рисунках отмечена неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$ , кружочками — седловой цикл длиной 2. Если же при пересечении бифуркационной кривой II слева направо неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$  переходит из репеллера в седло, то справа от кривой II появляется неустойчивый цикл длиной 2, который затем становится седловым (при этом не возникает ни длиннопериодичного цикла, ни хаотического аттрактора).

При пересечении бифуркационной кривой III слева направо происходит бифуркация седло–узел (на кривой III у неподвижной точки  $(x_1^*, y_1^*)$  собственные значения  $\mu_1 > 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ): в системе появляются две нетривиальные неподвижные точки, первая из которых является репеллером, вторая — седлом.

На бифуркационной кривой IV в системе реализуется бифуркация удвоения периода: на данной кривой неподвижная точка  $(k, 0)$  имеет собственные значения  $\mu_1 = -1$ ,  $\mu_2 = k$ . При этом справа от кривой IV появляется тривиальный ( $y_t = 0$ ) цикл длиной 2, характер которого определяется следующим образом. Если при пересечении бифуркационной кривой IV слева направо неподвижная точка  $(k, 0)$  переходит из аттрактора в седло, то справа от кривой IV появляется тривиальный устойчивый цикл длиной 2, который затем становится седловым. Вместе с седловым циклом вначале в системе появляется тривиальный ( $y_t = 0$ ) устойчивый длиннопериодичный цикл, а затем тривиальный ( $y_t = 0$ ) хаотический аттрактор. Если при пересечении бифуркационной кривой IV слева направо неподвижная точка  $(k, 0)$  переходит из седла в репеллер, то тривиальный цикл длиной 2 вначале является седловым, а затем становится неустойчивым (при этом в системе нет ни тривиального длиннопериодичного цикла, ни тривиального хаотического аттрактора).

На полупрямой  $k = 1$  неподвижная точка  $(k, 0)$  имеет собственные значения  $\mu_1 = 1 + r(l - 1) < 1$ ,  $\mu_2 = 1$  ( $l < 1$ ), поэтому здесь имеет место бифуркация седло–узел. При пересечении данной полупрямой слева направо неподвижная точка  $(k, 0)$  переходит из аттрактора в седло или из седла в репеллер, при этом в системе возникает нетривиальная неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$ , являющаяся аттрактором или седлом.

На полупрямой  $l = 1$  у неподвижной точки  $(l, 0)$  собственные значения  $\mu_1 = 1 + r(k - 1) > 1$ ,  $\mu_2 = 1$  ( $k > 1$ ), что соответствует бифуркации седло–узел. При пересечении данной полупрямой снизу вверх при  $1 < k \leq k_0$  (величина  $k_0$  введена на с. 2) исчезает нетривиальная неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$ , а при  $k > k_0$  появляется вторая седловая нетривиальная неподвижная точка  $(x_2^*, y_2^*)$ .

Особый интерес представляет точка пересечения бифуркационных кривых IV и  $k = 1$  (имеет место при  $r > 2$ ). На параметрическом портрете системы — это точка  $(k, l) = (1, 1 - 2/r)$ , в которой у неподвижной точки  $(k, 0)$  собственные значения  $\mu_1 = -1$ ,  $\mu_2 = 1$ . Поведение исходной системы в областях 1, 1а, и 3 в окрестности точки  $(1, 1 - 2/r)$  не отличается от поведения системы в самих этих областях (рис. 7, 8 (или 9) и 12 соответственно). Тогда как поведение системы в областях 3а и 5а имеет некоторые отличия. Здесь сказывается близость бифуркационных кривых IV и II. Рассмотрим данные области.

В области 3а (рис. 40:  $r = 3$ ,  $l = 0.4$ ,  $k = 1.2$ ) неподвижные точки  $(0, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  — аттракторы,  $(l, 0)$  — седло,  $(k, 0)$  — репеллер. Также в системе возникает тривиальный седловой или неустойчивый цикл длиной 2 (на рис. 40 представлен неустойчивый цикл, отмеченный кружочками). В данной области либо происходит вымирание хищников и жертв, либо их численности стремятся к постоянным значениям (неподвижная точка  $(x_1^*, y_1^*)$ ).

В области 5а (рис. 41:  $r = 3$ ,  $l = 0.3$ ,  $k = 1.2$ ) неподвижные точки  $(0, 0)$  — аттрактор,  $(l, 0)$  и  $(x_1^*, y_1^*)$  (на рис. отмечена квадратиком) — седла,  $(k, 0)$  — репеллер. За счет близости кривой III в системе может существовать нетривиальный устойчивый или седловой цикл длиной 2 (на рис. 41 представлен нетривиальный седловой цикл, отмеченный кружочками), а нахождение рядом кривой IV порождает тривиальный устойчивый, неустойчивый или седловой цикл длиной 2 (на рис. 41 представлен тривиальный неустойчивый цикл, также

отмеченный кружочками). При наличии нетривиального седлового цикла или тривиального неустойчивого или седлового цикла в системе возникает соответственно нетривиальный или тривиальный хаотический аттрактор (реже устойчивый длиннопериодичный цикл). На рис. 41 представлены оба данных аттрактора. Показатели Ляпунова, характеризующие нетривиальный хаотический аттрактор, положительны  $0 < h_2 < h_1$ , а для тривиального хаотического аттрактора —  $0 < h_2 < h_1$  или  $h_2 < 0 < h_1$ . Все траектории будут стремиться к одному из этих аттракторов (или к неподвижной точке  $(0, 0)$ ), а изменение численности хищников и жертв происходит сложным нерегулярным образом.

Автор благодарит А.С. Братуся за полезные советы и помощь в написании данной статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.
2. Братусь А.С., Новожилов А.С. Математические модели экологии и динамические системы с дискретным временем. М.: МГУ, 2003.
3. Карев Г.П., Березовская Ф.С. Дифференциальные уравнения в математических моделях. М.: МИ-ЭМ, 2000.
4. Одум Ю. Основы экологии. М: Мир, 1975.
5. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических процессов. М.: МГУ, 1993.
6. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983.
7. Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A. *Chaos*. An introduction to dynamical systems. New-York: Springer-Verlag, 1996.
8. Beddington J.R., Free C.A., Lawton J.H. Dynamic complexity in predator – prey models framed in difference equations. *Nature*, vol. 255, 1975, p. 58-60.
9. Frisman E.Ya., Last E.V. Oscillations and chaos in the model of the pacific salmon's number dynamics // Proc. Int. Conf. "Control of Oscillations and Chaos", St. Petersburg, vol. 3, 2000, p. 573-575.
10. Frisman E.Ya., Sycheva E.V. Oscillations and chaos in population dynamics caused by the hunting // Proc. Int. Conf. "Control of Oscillations and Chaos", St. Petersburg, vol. 3, 2000, p. 576-578.
11. Grossmann S., Thomae S. Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes. // *Zeitschr. Naturforschg*, vol. 32a, 1977, p. 1353 - 1363.
12. Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New-York: Springer-Verlag, 1995.
13. May R.M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. // *Nature*, vol. 261, 1976, p. 459-467.
14. Murry J.D. *Mathematical biology*. New-York: Springer-Verlag, second edition, 1996.
15. Varley G., Gradwell G., Hassel M. *Insect population ecology*. Berkeley: Univ. of Calif. Press, 1973.

Кафедра системного анализа  
ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
19.03.2005 г.

# МНОГОШАГОВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ГАРАНТИРОВАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

© 2005 г. Н. Б. Брусникина

Решение многих задач управления связано с нахождением множеств достижимости динамических систем. К настоящему времени разработаны различные подходы к аппроксимации множеств достижимости, наиболее известными из которых являются эллипсоидальная аппроксимация и полиэдральная аппроксимация. Методы эллипсоидальной аппроксимации, основанные на аппроксимации одним эллипсоидом [1] или пересечением и объединением эллипсоидов, построенных на основе решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2], дают возможность дать оценку расположения множества достижимости. В отличие от методов эллипсоидальной аппроксимации, методы полиэдральной аппроксимации, предложенные Л.С. Понтрягиным (см., например, предисловие Л.С. Понтрягина к книге [3]), направлены на аппроксимацию множества достижимости с любой степенью точности. Такие методы используют расчет опорной функции множества достижимости. Несмотря на то, что было разработано несколько альтернативных пошаговых подходов к построению полиэдральной аппроксимации множеств достижимости линейных динамических систем (см., например, [4], [5], [6], [7], [8]), основным практическим средством полиэдральной аппроксимации остаются методы, использующие расчет опорной функции. Для них предложены оптимальные методы выбора направлений, для которых эта функция рассчитывается [6].

Надо отметить одно важное преимущество методов эллипсоидальной аппроксимации и пошаговых методов над методами, основанными на расчете опорной функции, - они дают последовательность аппроксимаций множеств достижимости. В то время как методы, использующие расчет опорной функции, направлены, в основном, на аппроксимацию единственного множества достижимости в некоторый (обычно, конечный) момент времени, построение множеств достижимости в промежуточные моменты времени может быть крайне важным для исследования. Для преодоления указанного недостатка методов, основанных на расчете опорной функции, в работе [9] был предложен метод укрупненных шагов, в котором множества достижимости строились последовательно, в заданные исследователем моменты времени, причем расчет опорной функции каждого следующего множества был основан на использовании аппроксимации предыдущего множества. До настоящего времени метод укрупненных шагов не был реализован в связи с тем, что не была получена оценка погрешности, привносимой из-за такого расчета опорной функции. Эта проблема сформулирована, например, в [10].

В данной работе реализуется концепция метода укрупненных шагов и даются необходимые оценки погрешности. При этом предлагаемые методы базируются не на укрупнении шага для имеющегося разбиения временного интервала, а на дискретизации времени в соответствии с требованиями к точности аппроксимации. В связи с этим, мы в дальнейшем предлагаемые методы называем методами больших шагов. В данной работе предлагается построение как единственной последовательности многогранников, аппроксимирующих последовательность множеств достижимости, так и двух последовательностей аппроксимирующих многогранников - гарантированно внутренней и гарантированно внешней. Аппроксимации множеств достижимости в заданные моменты времени строятся с гарантированной оценкой точности. При этом используются результаты работы [11].

В §1 дана постановка задачи. В §2 рассматривается вопрос о полиэдральной аппроксимации множества достижимости в конечный момент времени. Предложены новые методы построения как единственного аппроксимирующего многогранника, так и пары многогранников (внутреннего и внешнего). Дается гарантированная оценка точности аппроксимации.

В §3 рассматривается вопрос о многошаговой полиэдральной аппроксимации последовательности множеств достижимости.

В §4 рассматривается пример аппроксимации последовательности множеств достижимости регулятора с использованием одного из методов, предложенных в §3.

**§1. Постановка задачи.** Рассмотрим автономную линейную управляемую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} \in Ax + U, & t \in [0, T] \\ x(0) \in X_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  – фазовая переменная,  $A$  – матрица размера  $n \times n$ ,  $U, X_0 \in R^n$  – непустые выпуклые многогранники. Обозначим через  $u(t)$  управление, под которым будем понимать любую измеримую функцию, удовлетворяющую включению  $u(t) \in U$  почти всюду.

Как обычно, под множеством достижимости  $X(T) = X(0, T, X_0)$  системы (1) в момент времени  $T$  будем понимать множество концов  $x(T)$  всех траекторий  $x(t)$ , допустимых в силу системы (1).

В линейном пространстве  $R^n$  со скалярным произведением  $\langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i x_i$  и соответствующей нормой расстояние между двумя непустыми компактными множествами  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$  будем оценивать с помощью метрики Хаусдорфа:  $\delta^h(X_1, X_2) = \max\{\sup_{x \in X_1} \rho(x, X_2), \sup_{x \in X_2} \rho(x, X_1)\}$ , где  $\rho(x, X) = \inf_{y \in X} \|x - y\|$ .

Пусть задано несколько моментов времени  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq T$ . Рассмотрим задачу аппроксимации последовательности множеств достижимости  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)$  для системы (1) с заданной точностью  $\varepsilon > 0$ . Под полиэдральной аппроксимацией последовательности множеств  $\{X(t_k)\}_{k=1}^M$  с точностью  $\varepsilon$  будем понимать:

*Задача 1.* Последовательность многогранников  $\{\hat{X}_k\}_{k=1}^M$  таких, что  $\delta^h(X(t_k), \hat{X}_k) \leq \varepsilon$  для любого  $k = 1 \dots M$ .

*Задача 2.* Последовательности внутренних многогранников  $\{X_{int}^k\}_{k=1}^M$ , т.е.  $X_{int}^k \subseteq X(t_k)$ , и внешних многогранников  $\{X_{ext}^k\}_{k=1}^M$ , т.е.  $X_{ext}^k \supseteq X(t_k)$ , таких, что  $\delta^h(X_{int}^k, X_{ext}^k) \leq \varepsilon$  для любого  $k = 1 \dots M$ .

Перед описанием метода построения последовательностей аппроксимирующих многогранников рассмотрим задачу полиэдральной аппроксимации множества достижимости системы (1) в конечный момент времени  $T$ .

**§2. Аппроксимация множества достижимости.** Рассмотрим две задачи аппроксимации множества достижимости  $X(T)$  с точностью  $\varepsilon$ .

*Задача 1.* Требуется найти многогранник  $\hat{X}$  такой, что  $\delta^h(X(T), \hat{X}) \leq \varepsilon$ .

*Задача 2.* Надо построить внутренний  $X_{int} \subseteq X(T)$  и внешний  $X_{ext} \supseteq X(T)$  многогранники, такие, что  $\delta^h(X_{int}, X_{ext}) \leq \varepsilon$ . Заметим, что тогда  $\delta^h(X(T), X_{int}) \leq \varepsilon$  и  $\delta^h(X(T), X_{ext}) \leq \varepsilon$ , т.е. оба многогранника  $X_{int}$  и  $X_{ext}$  аппроксимируют множество  $X(T)$  с точностью  $\varepsilon$ .

Обозначим через  $g(c, X)$  опорную функцию множества  $X \subset R^n$  в направлении  $c \in R^n$ ,  $\|c\| = 1$ , т.е.  $g(c, X) = \max_{x \in X} \langle c, x \rangle$ . Известно [12], что для двух непустых выпуклых компактных множеств  $X_1$  и  $X_2$  верно

$$\delta^h(X_1, X_2) = \sup_{\|c\|=1} |g(c, X_1) - g(c, X_2)|. \quad (2)$$

Поскольку  $X_0, U$  – непустые выпуклые многогранники, то в силу их компактности множество достижимости системы (1) является непустым выпуклым компактом [13].

Зафиксируем произвольное малое  $\varepsilon_1 > 0$ . Рассмотрим произвольное направление  $c \in R^n$ ,  $\|c\| = 1$ . Построим  $\tilde{g}(c, X(T))$  – оценку значения опорной функции множества достижимости  $X(T)$  в направлении  $c$  такую, что выполняется неравенство  $|g(c, X(T)) - \tilde{g}(c, X(T))| \leq \varepsilon_1$ , с помощью следующего метода.

*Метод расчета оценки значения опорной функции.* Разобьем отрезок  $[0, T]$  на  $N$  равных частей, узлы сетки обозначим  $t_i = ih$ ,  $i = 0 \dots N$ . Применив какой-либо метод аппроксимации

решения системы дифференциальных уравнений (см. [14]) к системе

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = -A\Phi, & 0 \leq t \leq T, \\ \Phi(T) = E, \end{cases} \quad (3)$$

где  $E \in R^{n \times n}$  – единичная матрица, найдем численную аппроксимацию матричной экспоненты  $\tilde{\Phi}(t_i) = e^{A(T-t_i)} + \hat{Z}_i$  в узлах равномерной сетки  $t_i, i = 0 \dots N$ , где  $\hat{Z}_i$  – матрица погрешности в момент времени  $t_i$ . Найдем векторы  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{u}_{t_i}, i = 0 \dots N$  из условий

$$\langle \tilde{\Phi}(t_i)\tilde{u}_{t_i}, c \rangle = \max_{u \in U} \langle \tilde{\Phi}(t_i)u, c \rangle, \quad (4)$$

$$\langle \tilde{\Phi}(0)\tilde{x}_0, c \rangle = \max_{x \in X_0} \langle \tilde{\Phi}(0)x, c \rangle. \quad (5)$$

Так как  $U$  и  $X_0$  – многогранники, то максимумы в (4), (5) достигаются в их вершинах и могут быть легко найдены. Вычислим

$$\tilde{x}(T) = \tilde{\Phi}(0)\tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^N \frac{h}{2} [\tilde{\Phi}(t_{i-1})\tilde{u}_{t_{i-1}} + \tilde{\Phi}(t_i)\tilde{u}_{t_i}]. \quad (6)$$

В качестве  $\tilde{g}(c, X(T))$  возьмем величину  $\langle c, \tilde{x}(T) \rangle$ . Описание метода окончено.

Заметим, что выбор  $\tilde{u}_{t_i}$  и  $\tilde{x}_0$  из условий (4), (5) может быть неоднозначным. Однако на значение  $\tilde{g}(c, X(T))$  это не влияет.

**Теорема 1.** [11] Пусть для некоторого  $c \in R^n, \|c\| = 1$  оптимальное управление  $u^*(t)$  задачи  $\langle c, x(T) \rangle \rightarrow \max_{x(T) \in X(T)}$ , где  $X(T)$  – множество достижимости системы (1), имеет на отрезке  $[0, T]$  не более  $N_1 - 1$  точек переключений. Тогда

$$|g(c, X(T)) - \tilde{g}(c, X(T))| \leq \frac{\lambda}{12} e^{\lambda T} (\lambda T + 3N_1) \|U\|_1 h^2 + K_1 (\|X_0\|_1 + T\|U\|_1),$$

где  $K_1$  – такая константа, что  $\|\hat{Z}_i\| \leq K_1$ , для любого  $i = 0, \dots, N$ ,  $\lambda$  – спектральная норма матрицы  $A$  ([15]),  $\|U\|_1 = \max_{u \in U} |u|, \|X_0\|_1 = \max_{x \in X_0} |x|$ .

**Замечание 2.** При использовании метода Рунге-Кутты 4-го порядка для нахождения приближенного решения системы уравнений (3) можно получить оценку ([11])

$$\|\hat{Z}_i\| \leq K_1 = \frac{T\lambda^5}{5!k_2^4} e^{T(2\lambda + \frac{1}{2k_2}\lambda^2 h + \frac{1}{6k_2^2}\lambda^3 h^2 + \frac{1}{24k_2^3}\lambda^4 h^3)} h^4,$$

где  $k_2 \geq 1$  – число разбиений каждого отрезка  $[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, N$ .

Выбирая шаг разбиения  $h$  и соответствующие параметры численного метода решения системы (3) такими, что  $\frac{\lambda}{12} e^{\lambda T} (\lambda T + 3N_1) \|U\|_1 h^2 + K_1 (\|X_0\|_1 + T\|U\|_1) \leq \varepsilon_1$ , получим

$$|g(c, X(T)) - \tilde{g}(c, X(T))| \leq \varepsilon_1. \quad (7)$$

Обозначим через  $\tilde{X}(T) = \tilde{\Phi}(0)X_0 + \sum_{i=1}^N \frac{h}{2} (\tilde{\Phi}(t_{i-1})U + \tilde{\Phi}(t_i)U)$ . Поскольку  $U, X_0$  – непустые выпуклые многогранники, то  $\tilde{X}(T)$  тоже непустой выпуклый многогранник. Кроме того,  $g(c, \tilde{X}(T)) = \tilde{g}(c, X(T))$ , для любого направления  $c \in R^n, \|c\| = 1$ . В самом деле, согласно (4), (5), (6) для любого направления  $c \in R^n, \|c\| = 1$  (см. [12])

$$g(c, \tilde{X}(T)) = g(c, \tilde{\Phi}(0)X_0 + \sum_{i=1}^N \frac{h}{2} (\tilde{\Phi}(t_{i-1})U + \tilde{\Phi}(t_i)U)) = g(c, \tilde{\Phi}(0)X_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{h}{2} (g(c, \tilde{\Phi}(t_{i-1})U) + g(c, \tilde{\Phi}(t_i)U)) = \langle c, \tilde{x}(T) \rangle = \tilde{g}(c, X(T)).$$

Согласно формулам (2) и (7) выполняется

$$\delta^h(X(T), \tilde{X}(T)) \leq \varepsilon_1. \quad (8)$$

В качестве многогранников  $\hat{X}$ ,  $X_{int}$ ,  $X_{ext}$  будем брать многогранники, аппроксимирующие множество  $\tilde{X}(T)$ , опорную функцию которого мы можем рассчитать практически точно. Для построения  $\hat{X}$ ,  $X_{int}$ ,  $X_{ext}$  можно использовать, например, адаптивные итеративные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел ([6]). Данные методы аппроксимации не используют заранее заданную сетку направлений, по которым вычисляется значение опорной функции, а на каждой итерации рассчитывают опорную функцию для нового направления, используя информацию об аппроксимируемом теле и уже построенном аппроксимирующем многограннике. Эти методы позволяют строить для выпуклых компактных тел аппроксимирующие многогранники, имеющие любую заданную степень точности. Адаптивность методов приводит к их оптимальности по числу вершин, скорости сходимости, а также, в некоторых случаях, и по числу измерений опорной функции [6], [10]. В дальнейшем будем считать, что используется один из таких методов, например, метод Уточнения Оценок (УО).

Обозначим через  $B_1 \in R^n$  шар единичного радиуса с центром в начале координат, а через  $B_d(x)$  шар единичного радиуса с центром в точке  $x$  с радиусом  $d > 0$ . Для множества  $C$  обозначим через  $r(C) = \max\{d \geq 0 : B_d(x) \subseteq C, x \in C\}$ . Для множеств  $C$  и  $B$  обозначим  $C + B = \{x \in R^n : x = x_1 + x_2, x_1 \in C, x_2 \in B\}$ . Пусть  $C$  – выпуклое компактное множество и  $r(C) > 2\delta$ , обозначим через  $C - \delta B_1$  – выпуклое множество, определяемое следующее опорной функцией  $g(c, C - \delta B_1) = g(c, C) - \delta$ . Заметим, что для выпуклого компактного тела  $C$  и любого  $\delta > 0$  такого, что  $r(C) > 2\delta$ , множества  $C + \delta B_1$  и  $C - \delta B_1$  являются выпуклыми компактными телами и, кроме того,  $g(c, C + \delta B_1) = g(c, C) + \delta$ .

Далее будем предполагать, что множество  $X(T)$  телесно. Отметим, что метод УО обнаруживает нетелесность аппроксимируемого множества. Тогда и  $\tilde{X}(T)$  при достаточно малом  $h$  также телесно и множество  $\tilde{X}(T) - \varepsilon_1 B_1$  непусто при достаточно малом  $\varepsilon_1$ .

*Решение задачи 1.* С помощью метода полиэдральной аппроксимации УО построим многогранник  $\hat{X}$ , который будет аппроксимировать множество  $\tilde{X}(T)$  с точностью  $\varepsilon_2$ , т.е.  $\delta^h(\hat{X}, \tilde{X}(T)) \leq \varepsilon_2$ . Тогда многогранник  $\hat{X}$  будет аппроксимировать и множество  $X(T)$ , при этом согласно (8) имеем  $\delta^h(X(T), \hat{X}) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Взяв  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ , получим искомую аппроксимацию.

Заметим, что задача выбора соотношения погрешностей  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  достаточно сложна. Ее решение зависит от относительной сложности измерения опорной функции и построения полиэдральной аппроксимации.

*Решение задачи 2.* Пусть  $X_{int}$  – вписанный в  $\tilde{X}(T) - \varepsilon_1 B_1$  многогранник, полученный с помощью метода УО, т.е.  $X_{int} \subseteq \tilde{X}(T) - \varepsilon_1 B_1$ , при этом потребуем, чтобы  $\delta^h(X_{int}, \tilde{X}(T) - \varepsilon_1 B_1) \leq \varepsilon_2$ . Пусть  $X_{ext}$  – описанный вокруг  $\tilde{X}(T) + \varepsilon_1 B_1$  многогранник, полученный с помощью метода УО, т.е.  $X_{ext} \supseteq \tilde{X}(T) + \varepsilon_1 B_1$ , при этом потребуем, чтобы  $\delta^h(X_{ext}, \tilde{X}(T) + \varepsilon_1 B_1) \leq \varepsilon_2$ .

Из (8) следует, что  $X(T) \subseteq \tilde{X}(T) + \varepsilon_1 B_1 \subseteq X_{ext}$  и  $X_{int} \subseteq \tilde{X}(T) - \varepsilon_1 B_1 \subseteq X(T)$ . И, кроме того,  $\delta^h(X_{int}, X_{ext}) \leq 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ . Взяв  $2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq \varepsilon$ , получим  $\delta^h(X_{int}, X_{ext}) \leq \varepsilon$ .

В дальнейшем нам понадобится следующий факт.

**Замечание 3.** Пусть известно, что для некоторого множества  $X'$  выполняется  $\delta^h(X', X(T)) \leq \varepsilon'$ . Тогда  $\delta^h(\tilde{X}(T), X') \leq \varepsilon_1 + \varepsilon'$ . Построим  $X'_{int}$  – вписанный в  $\tilde{X}(T) - (\varepsilon_1 + \varepsilon')B_1$  многогранник, полученный с помощью метода УО такой, что  $\delta^h(X'_{int}, \tilde{X}(T) - (\varepsilon_1 + \varepsilon')B_1) \leq \varepsilon_2$ . И  $X'_{ext}$  – описанный вокруг  $\tilde{X}(T) + (\varepsilon_1 + \varepsilon')B_1$  многогранник, полученный с помощью метода УО такой, что  $\delta^h(X'_{ext}, \tilde{X}(T) + (\varepsilon_1 + \varepsilon')B_1) \leq \varepsilon_2$ . Тогда

$$X'_{int} \subseteq \tilde{X}(T) - (\varepsilon_1 + \varepsilon')B_1 \subseteq X' \subseteq \tilde{X}(T) + (\varepsilon_1 + \varepsilon')B_1 \subseteq X'_{ext}$$



и, кроме того,  $\delta^h(X'_{int}, X'_{ext}) \leq 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon')$ . Таким образом, многогранники  $X'_{int}$  и  $X'_{ext}$  будут гарантированно внутренней и гарантированно внешней оценкой множества  $X'$ .

**Замечание 4.** Согласно теореме 1 и формуле (2)

$$\delta^h(X(T), \tilde{X}(T)) \leq \frac{\lambda}{12} e^{\lambda T} (\lambda T + 3N_1) \|U\|_1 h^2 + K_1 (\|X_0\|_1 + T \|U\|_1).$$

Выбирая параметры численного метода решения системы (3) такими, что  $K_1 = \bar{o}(h^2)$ , и точность полиэдральной аппроксимации  $\varepsilon_2 = \bar{o}(h^2)$ , получим

$$\delta^h(X(T), \hat{X}) \leq \frac{\lambda}{12} e^{\lambda T} (\lambda T + 3N_1) \|U\|_1 h^2 + \bar{o}(h^2) \tag{9}$$

в решении задачи 1 и

$$\delta^h(X_{int}, X_{ext}) \leq \frac{\lambda}{6} e^{\lambda T} (\lambda T + 3N_1) \|U\|_1 h^2 + \bar{o}(h^2) \tag{10}$$

в решении задачи 2. Таким образом, данный метод аппроксимации множеств достижимости имеет второй порядок скорости сходимости по шагу временного разбиения, что не улучшаемо в классе разностных методов линейной аппроксимации линейных управляемых систем [16], [17].

Полученные оценки позволяют использовать предложенный метод для практического построения аппроксимации множеств достижимости.

**§3. Многошаговая аппроксимация множеств достижимости.** Рассмотрим вопрос об аппроксимации последовательности множеств достижимости  $\{X(t_k)\}_{k=1}^M$ , где  $t_k$  – заданные моменты времени. Последовательность аппроксимирующих множеств  $\{\hat{X}_k\}_{k=1}^M$  будем строить с помощью метода больших шагов, состоящего в полиэдральной аппроксимации множества  $X(t_k)$  с использованием аппроксимации  $\hat{X}_{k-1}$  множества  $X(t_{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, M$  на основе измерения опорной функции. Переход от момента  $t_{k-1}$  к моменту  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , будем называть большим шагом. На основе требований к точности аппроксимации отрезков  $[t_{k-1}, t_k]$  будем разбивать на требуемое число обычных шагов длиной  $h_k$ , которые, в свою очередь, будут разбиваться в соответствии с параметрами метода Рунге-Кутты (см. §2).

**Замечание 5.** Для системы

$$\begin{cases} \dot{x} \in Ax + U, & 0 \leq t \leq T, \\ x(0) \in P_0, \end{cases} \tag{11}$$

где  $P_0$  – многогранник, аппроксимирующий множество  $X_0$ , такой, что  $\delta^h(P_0, X_0) \leq \varepsilon_0$ , имеем  $\delta^h(X'(T), X(T)) = e^{AT} \delta^h(P_0, X_0)$ , где  $X'(T)$  – множество достижимости системы (11).

Пусть задано  $\varepsilon > 0$  – требуемая точность, введенная в §1.

*Решение задачи 1.* Будем аппроксимировать последовательность множеств достижимости  $\{X(t_k)\}_{k=1}^M$  последовательностью многогранников  $\{\hat{X}_k\}_{k=1}^M$  так, чтобы  $\delta^h(X(t_k), \hat{X}_k) \leq \delta_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , где  $\delta_k = \frac{\varepsilon k}{M} e^{-\lambda(t_M - t_k)}$ . Для  $k = 0$  положим  $\delta_0 = 0$ ,  $\hat{X}_0 = X_0$ .

Рассмотрим  $k$ -ый шаг метода: перед началом  $k$ -ого шага уже получен многогранник  $\hat{X}_{k-1}$ , аппроксимирующий множество  $X(t_{k-1})$ , такой, что  $\delta^h(X(t_{k-1}), \hat{X}_{k-1}) \leq \delta_{k-1}$ . Для аппроксимации множества  $X(t_k)$  применим метод аппроксимации множеств достижимости линейных управляемых систем, описанный в §2, к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dot{x} \in Ax + U, & 0 \leq t \leq t_k - t_{k-1}, \\ x(0) \in \hat{X}_{k-1}. \end{cases} \tag{12}$$

Множество достижимости для системы (12) обозначим через  $X'(t_k - t_{k-1})$ . С помощью метода, описанного в §2 построим такой многогранник  $\hat{X}_k$ , аппроксимирующий множество  $X'(t_k - t_{k-1})$ .

$t_{k-1}$ ), что  $\delta^h(X'(t_k - t_{k-1}), \hat{X}_k) \leq \frac{\varepsilon}{M} e^{-\lambda(t_M - t_k)}$ . При этом шаг сетки  $h_k$  на данном шаге нужно выбрать таким, чтобы выполнялось

$$\frac{\lambda}{12} e^{\lambda T} (\lambda T + 3N_1) \|U\|_1 h^2 + K_1 (\|X_0\|_1 + T \|U\|_1) + \varepsilon_2 \leq \frac{\varepsilon}{M} e^{-\lambda(t_M - t_k)}. \quad (13)$$

Тогда по замечанию 5 и выбору  $\delta_{k-1}$  получим  $\delta^h(\hat{X}_k, X(t_k)) \leq \delta^h(\hat{X}_k, X'(t_k - t_{k-1})) + \delta^h(X'(t_k - t_{k-1}), X(t_k)) \leq \frac{\varepsilon}{M} e^{-\lambda(t_M - t_k)} + e^{\lambda(t_k - t_{k-1})} \delta_{k-1} \leq \frac{\varepsilon}{M} e^{-\lambda(t_M - t_k)} + \frac{\varepsilon(k-1)}{M} e^{-\lambda(t_M - t_k)} = \delta_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ .

Таким образом, последовательность многогранников  $\{\hat{X}_k\}_{k=1}^M$  аппроксимирует последовательность множеств  $\{X(t_k)\}_{k=1}^M$ , причем так как  $\lambda > 0$ , то  $\delta_k \leq \varepsilon$  для любого  $k = 1, \dots, M$ .

*Решение задачи 2.* Будем аппроксимировать последовательность множеств достижимости  $\{X(t_k)\}_{k=1}^M$  последовательностями внутренних  $\{X_{int}^k\}_{k=1}^M$  и внешних  $\{X_{ext}^k\}_{k=1}^M$  многогранников так, чтобы  $\delta^h(X_{int}^k, X_{ext}^k) \leq \delta_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , где  $\delta_k = \frac{\varepsilon k}{M} e^{-\lambda(t_M - t_k)}$ . Для  $k = 0$  положим  $\delta_0 = 0$ ,  $X_{int}^0 = X_{ext}^0 = X_0$ .

Рассмотрим  $k$ -ый шаг метода: перед началом  $k$ -ого шага уже получены внешний  $X_{ext}^{k-1} \supseteq X(t_{k-1})$  и внутренний  $X_{int}^{k-1} \subseteq X(t_{k-1})$  аппроксимирующие многогранники для множества  $X(t_{k-1})$  такие, что  $\delta^h(X_{int}^{k-1}, X_{ext}^{k-1}) \leq \delta_{k-1}$ . При этом  $\delta^h(X_{int}^{k-1}, X(t_{k-1})) \leq \delta_{k-1}$  и  $\delta^h(X(t_{k-1}), X_{ext}^{k-1}) \leq \delta_{k-1}$ .

Рассмотрим выпуклый многогранник  $X^{k-1} = \frac{X_{int}^{k-1} + X_{ext}^{k-1}}{2}$ . Тогда  $\delta^h(X^{k-1}, X(t_{k-1})) \leq \frac{\delta_{k-1}}{2}$ . Для аппроксимации множества  $X(t_k)$  применим метод аппроксимации множеств достижимости линейных управляемых систем к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dot{x} \in Ax + U, & 0 \leq t \leq t_k - t_{k-1}, \\ x(0) \in X^{k-1}. \end{cases} \quad (14)$$

Соответствующее множество достижимости обозначим через  $X'(t_k - t_{k-1})$ . По замечанию 5  $\delta^h(X'(t_k - t_{k-1}), X(t_k)) \leq e^{\lambda(t_k - t_{k-1})} \frac{\delta_{k-1}}{2}$ . С помощью метода, описанного в §2 (см. замечание 3), построим внешний  $X_{ext}^k \supseteq X'(t_k - t_{k-1}) + \frac{\delta_{k-1}}{2} B_1$  и внутренний  $X_{int}^k \subseteq X'(t_k - t_{k-1}) - \frac{\delta_{k-1}}{2} B_1$  аппроксимирующие многогранники такие, что погрешности аппроксимации  $\delta^h(X_{int}^k, X'(t_k - t_{k-1}) - \frac{\delta_{k-1}}{2} B_1) \leq \frac{\varepsilon}{2M} e^{-\lambda(t_M - t_k)}$ ,  $\delta^h(X_{ext}^k, X'(t_k - t_{k-1}) + \frac{\delta_{k-1}}{2} B_1) \leq \frac{\varepsilon}{2M} e^{-\lambda(t_M - t_k)}$ .

Тогда согласно замечанию 3

$$\delta^h(X_{int}^k, X_{ext}^k) \leq 2 \left( \frac{\varepsilon}{2M} e^{-\lambda(t_M - t_k)} + e^{\lambda(t_k - t_{k-1})} \frac{\varepsilon(k-1)}{2M} e^{-\lambda(t_M - t_{k-1})} \right) = \delta_k$$

и, кроме того,  $X_{int}^k \subseteq X(t_k) \subseteq X_{ext}^k$ . Так как  $\lambda > 0$ , то  $\delta_k \leq \varepsilon$  для любого  $k = 1, \dots, M$  и, следовательно, многогранники  $X_{int}^k$  и  $X_{ext}^k$  являются гарантированно внутренней и гарантированно внешней оценками множества  $X(t_k)$  для любого  $k = 1, \dots, M$ .

**§4. Аппроксимация множеств достижимости регулятора.** Рассмотрим применение метода, описанного в §3 на примере наиболее простой динамической системы – регулятора. Его динамика описывается следующим уравнением:

$$\ddot{x} = u, \quad (15)$$

где  $-1 \leq u \leq 1$ . Пусть в начальный момент времени  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Требуется построить множества достижимости регулятора в моменты времени 1, 2, 4, 6. Рассмотрим две задачи:

А) точность аппроксимации  $\varepsilon = 0,38$ ;

Б) относительная точность аппроксимации на каждом шаге должна быть не более 1%.

Уравнение (15) можно переписать в виде линейной динамической системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, & -1 \leq u \leq 1, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

В данном случае (см. обозначения §1-§3)  $N_1 = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\|U\|_1 = 1$ ,  $\|X_0\|_1 = 0$ . И согласно теореме 1 и замечанию 2 для множества достижимости  $X(T)$  системы (16) выполняется

$$\delta^h(X(T), \tilde{X}(T)) \leq \frac{1}{12}e^T(T+6)h^2 + K_1T,$$

где  $K_1 = \frac{T}{120k_2^4}e^{T(2+\frac{h}{2k_2}+\frac{h^2}{6k_2^2}+\frac{h^3}{24k_2^3})}h^4$ ,  $k_2 \geq 1$  - параметр метода Рунге-Кутты. Заметим, что при  $\frac{h}{k_2} \leq 1$  следует, что  $K_1 \leq \frac{T}{120k_2^4}e^{\frac{65T}{24}}h^4 \leq \frac{T}{120}e^{\frac{65T}{24}}h^4$ .

Обозначим  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 4$ ,  $t_4 = 6$ , через  $X(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , соответствующие множества достижимости системы (16), а через  $\hat{X}_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , аппроксимирующие их многогранники. Покажем, как надо выбирать шаг аппроксимации по временной сетке на каждом последовательном временном отрезке аппроксимации  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , для достижения нужной точности аппроксимации. Для решения данной задачи выберем  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \frac{1}{12}e^T(T+6)h^2 + K_1T$ .

*Решение задачи А).*

- При  $k = 1$  имеем  $t_1 = 1$ ,  $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 1$ ,  $\delta_1 = \frac{0,38}{4}e^{-5}$ . Согласно (13) шаг  $h_1$  надо выбирать таким образом, чтобы выполнялось  $\frac{7e}{12}h_1^2 + K_1 \leq \frac{0,38}{8}e^{-5}$ . Например, можно взять  $h_1 = 0,0139$ , т.е. надо разбить отрезок  $[0, 1]$  на 72 части.
- При  $k = 2$  имеем  $t_2 = 2$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 1$ ,  $\delta_2 = \frac{0,38}{2}e^{-4}$ . Согласно (13) шаг  $h_2$  надо выбирать таким образом, чтобы выполнялось  $\frac{7e}{12}h_2^2 + K_1 \leq \frac{0,38}{8}e^{-4}$ . Например, можно взять  $h_2 = 0,02$ , т.е. надо разбить отрезок  $[0, 1]$  на 50 частей.
- При  $k = 3$  имеем  $t_3 = 4$ ,  $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 2$ ,  $\delta_3 = \frac{3*0,38}{4}e^{-2}$ . Согласно (13) шаг  $h_3$  надо выбирать таким образом, чтобы выполнялось  $\frac{8e^2}{12}h_3^2 + 2K_1 \leq \frac{0,38}{8}e^{-2}$ . Например, можно взять  $h_3 = 0,0357$ , т.е. надо разбить отрезок  $[0, 2]$  на 56 частей.
- При  $k = 4$  имеем  $t_4 = 6$ ,  $\Delta t_4 = t_4 - t_3 = 2$ ,  $\delta_4 = 0,38$ . Согласно (13) шаг  $h_4$  надо выбирать таким образом, чтобы выполнялось  $\frac{8e^2}{12}h_4^2 + 2K_1 \leq \frac{0,38}{8}$ . Например, можно взять  $h_4 = 0,08$ , т.е. надо разбить отрезок  $[0, 2]$  на 25 частей.

*Решение задачи Б).*

Известно, что множество  $X(T)$  описывается кусками двух парабол  $x_1 = -\frac{1}{4}(x_2 - T)^2 + \frac{1}{2}T^2$  и  $x_1 = \frac{1}{4}(x_2 + T)^2 - \frac{1}{2}T^2$ . Откуда  $diam X(T) = T\sqrt{T^2 + 4}$ .

Выбор шага  $h_k$  на каждом большом шаге  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, \dots, 4$  должен обеспечивать не только достижение относительной точности аппроксимации на данном шаге, но и достижение относительной точности на всех последующих. Поэтому будем решать задачу, начиная с последнего момента времени.

- При  $k = 4$  имеем  $t_4 = 6$ ,  $\Delta t_4 = t_4 - t_3 = 2$ . Для достижения 1% относительной точности аппроксимации на этом шаге должно выполняться  $\delta^h(X(t_4), \hat{X}_4) \leq \frac{diam X(t_4)}{100} = \frac{12\sqrt{10}}{100} \approx 0,38$ . Тогда (см. решение задачи А) можно взять  $h_4 = 0,08$ , т.е. разбить отрезок  $[0, 2]$  на 25 частей.
- При  $k = 3$  имеем  $t_3 = 4$ ,  $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 2$ . Для достижения 1% относительной точности аппроксимации на этом шаге должно выполняться  $\delta^h(X(t_3), \hat{X}_3) \leq \frac{8\sqrt{5}}{100}$ . Кроме того, для достижения 1% относительной точности аппроксимации на следующем шаге должно выполняться  $\delta^h(X(t_3), \hat{X}_3) \leq \frac{36\sqrt{10}}{400}e^{-2} < \frac{8\sqrt{5}}{100}$ . Для этого можно взять  $h_3 = 0,0357$ , т.е. разбить отрезок  $[0, 2]$  на 56 частей.

- При  $k = 2$  имеем  $t_2 = 2$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 1$ . Для достижения 1% относительной точности аппроксимации на этом шаге должно выполняться  $\delta^h(X(t_2), \hat{X}_2) \leq \frac{4\sqrt{2}}{100}$ . Кроме того, для достижения 1% относительной точности аппроксимации на следующих шагах должно выполняться  $\delta^h(X(t_2), \hat{X}_2) \leq \frac{24\sqrt{10}}{400}e^{-4} < \frac{4\sqrt{2}}{100}$ . Для этого можно взять  $h_2 = 0,02$ , т.е. разбить отрезок  $[0, 1]$  на 50 частей.
- При  $k = 1$  имеем  $t_1 = 1$ ,  $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 1$ . Для достижения 1% относительной точности аппроксимации на этом шаге должно выполняться  $\delta^h(X(t_1), \hat{X}_1) \leq \frac{\sqrt{5}}{100}$ . Кроме того, для достижения 1% относительной точности аппроксимации на следующих шагах должно выполняться  $\delta^h(X(t_1), \hat{X}_1) \leq \frac{12\sqrt{10}}{400}e^{-5} < \frac{\sqrt{5}}{100}$ . Для этого можно взять  $h_1 = 0,0139$ , т.е. разбить отрезок  $[0, 1]$  на 72 части.

В заключение автор выражает благодарность А.В.Лотову за постановку задачи, помощь при разработке темы и плодотворное обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №04-01-00662), программой государственной поддержки ведущих научных школ (проект №НШ-1843.2003.1), программой фундаментальных исследований РАН "Математическое моделирование и интеллектуальные исследования" и программой фундаментальных исследований ОМН РАН №3.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М., Наука, 1988.
2. A.V.Kurzhanski, I.Valyi. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhauser-Boston, 1996.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1968.
4. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейной управляемой системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972. Т. 12, №3.
5. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975. Т. 15, №1.
6. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М., Наука, 1997.
7. Костюсова Е.К. О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем // Автоматика и телемеханика, 1997, №3, С. 57-68.
8. E.K. Kostousova. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimization Methods & Software, 1998, Vol.9, №4, pp. 269-306.
9. Лотов А.В. Методы анализа математических моделей управляемых систем на основе построения множества достижимых значений критериев качества управления, диссер. на соискание степ. д. ф.-м. н. М., ВЦ АН СССР, 1985.
10. A.V. Lotov, V.A. Bushenkov, G.K. Kamenev. Interactive decision maps. Approximation and visualization of Pareto Frontier. Boston, Kluwer Academic Publishers, 2004.
11. Брусникина Н.Б. Расчет опорной функции множества достижимости линейной управляемой системы с гарантированной оценкой погрешности // Вестник МГУ, принято к печати.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973.
13. Благодатский В.И. Введение в оптимальное управление. М., Высш.шк., 2001.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., Наука, 1987.
15. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., Наука, 1977.
16. V. Veliov. Second order discrete approximations to the linear differential inclusions // SIAM J. Numer. Anal., № 29(1992), pp. 439-451.
17. A. Dontchev, F. Lempio. Difference methods for differential inclusions: a survey // SIAM Review, Vol. 34, № 2, 1992, pp. 263-294.

Кафедра системного анализа  
ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
19.06.2005 г.

## СИНТЕЗ КОРРЕКТНЫХ АЛГОРИТМОВ В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ РАСШИРЕНИИ ОДНОЙ П-МОДЕЛИ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ

© 2005 г. О. М. Васильев

**Введение. Постановка задачи.** Проблема распознавания образов в течение достаточно продолжительного времени привлекает внимание специалистов в области прикладной математики и информатики. К середине 1970-х годов научное направление распознавания достигло такой стадии развития, что возникла возможность создания строгой математической теории. Отечественной школой во главе с Ю. И. Журавлёвым был разработан *алгебраический подход* в задачах распознавания, классификации и прогнозирования (см. [1], [2]). В рамках предложенного подхода алгоритмы распознавания мыслятся как элементы некоторой алгебраической структуры, называемой *моделью алгоритмов*, с заданным набором устойчивых операций, называемых *корректирующими операциями*. Посредством введения новых корректирующих операций удаётся расширить существующие модели, и добиться тем самым разрешимости, в рамках новых расширенных моделей, более широкого класса задач.

Требуется в рамках *алгебраического* подхода синтезировать *алгоритмы*  $A$ , реализующие вычислимые отображения из *пространства начальных информации*  $\mathcal{I}_i = \mathbb{R}^n$  в *пространство финальных информации*  $\mathcal{I}_f = \{K_1, K_2, \Delta\}$  на основании *прецедентной информации*  $\{x_k, y_k\}_{k=1}^q \subset \mathcal{I}_i \times \{\mathcal{I}_f \setminus \Delta\}$ . Изначально предполагается, что классы не пусты:  $\{k \mid y_k = K_1\} \neq \emptyset$  и  $\{k \mid y_k = K_2\} \neq \emptyset$ .

**1. Модель алгоритмов.** Алгебраический подход предполагает разложение *алгоритма*  $A$  в суперпозицию *алгоритмического оператора*  $B: \mathcal{I}_i \rightarrow \mathcal{I}_e$  и *решающего правила*  $C: \mathcal{I}_e \rightarrow \mathcal{I}_f$ , где  $\mathcal{I}_e$  — *пространство оценок*. В качестве *пространства оценок* возьмём множество действительных чисел ( $\mathcal{I}_e = \mathbb{R}$ ).

Предполагается заданной *потенциальная функция*  $K: \mathcal{I}_i^2 \rightarrow \mathcal{I}_e$ , удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1)  $K(\tilde{u}, \tilde{v}) > 0, \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{I}_i$
- 2)  $K(\tilde{u}, \tilde{u} + |\mu|(\tilde{v} - \tilde{u})) = K(|\mu|), \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{I}_i, \mu \in \mathbb{R}$ , где  $K(|\mu|)$  — монотонно убывающая на  $\mathbb{R}^+$  функция с глобальным максимумом в точке 0.

Заранее отмечу, что монотонность потенциальной функции при дальнейшем рассмотрении не потребуется, необходимым является лишь свойство положительности функции.

Наряду с *потенциальной функцией* рассматриваются две производные от неё конструкции:

$$K_1\text{-потенциал} \quad \Gamma_+(\tilde{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=\overline{1, q}; y_k=K_1} K(\tilde{u}, x_k)$$

и

$$K_2\text{-антипотенциал} \quad \Gamma_-(\tilde{u}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{k=\overline{1, q}; y_k=K_2} K(\tilde{u}, x_k).$$

**Определение.** Рассматривается следующая *модель алгоритмических операторов*:

$$\mathfrak{M}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{B: \mathcal{I}_i \rightarrow \mathcal{I}_e \mid \forall \tilde{u} \in \mathcal{I}_i : B(\tilde{u}) = a\Gamma_+(\tilde{u}) + b\Gamma_-(\tilde{u}), a, b \in \mathbb{R}^+\}.$$

Это значит, что любой алгоритмический оператор является линейной комбинацией  $K_1$ -потенциала и  $K_2$ -антипотенциала с неотрицательными коэффициентами.

Отказ от весов прецедентов (по сравнению с классическим подходом) является сильной стороной рассматриваемого семейства алгоритмических операторов, потому как размерность оптимизационной задачи становится небольшой (равной двум) и не растёт с ростом количества прецедентов.

**Определение.** Семейство решающих правил  $\mathfrak{M}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{C_1: \mathfrak{I}_e \rightarrow \mathfrak{I}_f\}$  составим из единственного отображения

$$C_1(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} K_1, & \Gamma > 0 \\ \Delta, & \Gamma = 0 \\ K_2, & \Gamma < 0 \end{cases}.$$

**Определение.** Оптимальным в модели назовём алгоритм, доставляющий минимум функционалу количества ошибок (см., например, [3]). Соответствующий оптимальному алгоритму алгоритмический оператор также назовём оптимальным. В случае, если значение функционала количества ошибок равно нулю, соответствующий алгоритм называют корректным.

Ввиду дискретности функционала количества ошибок оптимальный алгоритм (и, соответственно, оператор) не единственен. Для нахождения оптимума функционала можно воспользоваться линейным по количеству прецедентов алгоритмом, который будет приведён позже.

**2. Алгебраическое расширение модели.** Изначально предполагалось рассматривать корректирующие операции максимум и минимум, однако, выяснилось, что они не расширяют рассматриваемую модель.

**Определение.** Минимизатор модуля ( $ABSMIN_n$ ) —  $n$ -местная операция на пространстве оценок, определяемая следующим правилом:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{I}_e : ABSMIN_n(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{\Gamma \in \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}} |\Gamma|.$$

Это значит, что минимизатор модуля выбирает из множества ту оценку, модуль которой наименьший.

Семейство корректирующих операций  $\mathfrak{F}$  предлагается составить из минимизаторов модуля всех положительных арностей:  $\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{ABSMIN_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Все операции из данного семейства естественным образом индуцированы на модель алгоритмических операторов  $\mathfrak{M}_0$ . Все суперпозиции вида  $C \circ F(B_1, \dots, B_p)$ , где  $C \in \mathfrak{M}_1$ ,  $B \in \mathfrak{M}_0$ ,  $F \in \mathfrak{F}$  образуют  $\mathfrak{F}$ -расширение исходной модели алгоритмов  $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}_1 \circ \mathfrak{F}[\mathfrak{M}_0]$ . Расширенная модель не сужает класс решаемых в модели задач, т.к. содержит тождественную унарную корректирующую операцию  $ABSMIN_1$ . Для  $\mathfrak{F}$ -расширения как модели также имеют место понятия корректных и оптимальных алгоритмов и алгоритмических операторов.

**3. Синтез оптимальных алгоритмов в расширенном семействе.** Введём некоторые вспомогательные понятия.

**Определение.** Матрицу  $M^\pm$ , строки которой помечены прецедентами, первый столбец состоит из значений  $K_1$ -потенциала, а второй из значений  $K_2$ -антипотенциала на соответствующих строках прецедентах, назовём матрицей потенциалов.

**Определение.** Вектор  $D^\pm$ , полученный почленным делением первого столбца матрицы потенциалов на второй, назовём вектором потенциальных отношений. Соответственно, потенциальным отношением в точке  $\tilde{u} \in \mathfrak{I}_i$  назовём отношение  $\frac{\Gamma_+(\tilde{u})}{\Gamma_-(\tilde{u})}$ . Определение корректно, ввиду свойства положительности потенциальных функций.

**Пример.** (Задача, для которой не существует корректного алгоритма в  $\mathfrak{M}$ , но существует корректный алгоритм в  $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$ )

Здесь в качестве пространства начальных информационных рассмотрена числовая плоскость  $\mathbb{R}^2$ ; класс  $K_1$  назовём «крестиками» ( $\times$ ), а  $K_2$  — «ноликами» (o).

Прецедентная информация:

$$\{ \{-10.5, 0\}^T, o \}, \{-10, 0\}^T, \times \}, \{-9.5, 0\}^T, o \}, \{9.5, 0\}^T, \times \}, \{10, 0\}^T, o \}, \{10.5, 0\}^T, \times \}.$$

Потенциальная функция:

$$K \left( \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\} \right) = e^{-d^2 \left( \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\} \right)}, \text{ здесь } d(\tilde{u}, \tilde{v}) \text{ — евклидова метрика.}$$

	$\Gamma_+$	$\Gamma_-$	
Выпишем матрицу потенциалов:	$\{-10.5, 0\}^T, o$	0.78	-1.37
	$\{-10, 0\}^T, \times$	1.00	-1.58
	$\{-9.5, 0\}^T, o$	0.78	-1.37
	$\{9.5, 0\}^T, \times$	1.37	-0.78
	$\{10, 0\}^T, o$	1.58	-1.00
	$\{10.5, 0\}^T, \times$	1.37	-0.78

Заметим, что алгоритмический оператор с параметрами  $a$  и  $b$  выставит второму прецеденту оценку  $a - 1.58b$ , а пятому —  $1.58a - b$ , тогда в предположении о существовании в модели корректного алгоритма имеем:  $\exists a \geq 0, \exists b \geq 0 : \begin{cases} a - 1.58b > 0 \\ 1.58a - b < 0 \end{cases}$ . Отсюда, с использованием транзитивности отношения «больше» получаем противоречивое неравенство  $a > 1.58^2 a$ .

Итак, в модели нет корректного алгоритма, однако в расширенной модели корректный алгоритм существует. Выпишем его в явном виде:

$$A = C_1 \circ ABSMIN_2(1.6\Gamma_+ + \Gamma_-, \Gamma_+ + 1.6\Gamma_-).$$

**Теорема (критерий существования корректного алгоритма в расширенном семействе).** *Для того чтобы в алгебраическом расширении модели алгоритмов  $\mathfrak{M}$  семейством корректирующих операций  $\mathfrak{F}$  (рассматриваемым семейством минимизаторов модуля) существовал корректный алгоритм необходимо и достаточно, чтобы вектор потенциальных отношений  $D^\pm$  не содержал двух одинаковых значений для прецедентов из разных классов, т.е.*

$$\forall i, j \in \overline{1, q} : D_i^\pm = D_j^\pm \Rightarrow y_i = y_j. \quad (*)$$

**Доказательство. Необходимость.** Докажем, что любой алгоритмический оператор в расширенном семействе точкам с одинаковым потенциальным отношением ставит в соответствие оценки одного знака. Пусть точки  $u$  и  $v$  имеют одинаковое потенциальное отношение  $d^*$ . Их  $K_1$ -потенциалы и  $K_2$ -антипотенциалы обозначим соответственно  $\Gamma_+^u, \Gamma_-^u$  и  $\Gamma_+^v, \Gamma_-^v$ . Тогда  $\frac{\Gamma_+^u}{\Gamma_-^u} = \frac{\Gamma_+^v}{\Gamma_-^v} = d^*$ , а следовательно  $\begin{cases} \Gamma_+^u = \alpha \Gamma_+^v \\ \Gamma_-^u = \alpha \Gamma_-^v \end{cases}$ , где  $\alpha$  — некоторое положительное число.

Рассмотрим произвольный оператор в расширенном семействе:

$$ABSMIN_l(a_1\Gamma_+ + b_1\Gamma_-, \dots, a_l\Gamma_+ + b_l\Gamma_-).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & ABSMIN_l(a_1\Gamma_+ + b_1\Gamma_-, \dots, a_l\Gamma_+ + b_l\Gamma_-)(u) = ABSMIN_l(a_1\Gamma_+^u + b_1\Gamma_-^u, \dots, a_l\Gamma_+^u + b_l\Gamma_-^u) = \\ & = ABSMIN_l(a_1\alpha\Gamma_+^v + b_1\alpha\Gamma_-^v, \dots, a_l\alpha\Gamma_+^v + b_l\alpha\Gamma_-^v) = \alpha ABSMIN_l(a_1\Gamma_+^v + b_1\Gamma_-^v, \dots, a_l\Gamma_+^v + b_l\Gamma_-^v) = \\ & = \alpha ABSMIN_l(a_1\Gamma_+ + b_1\Gamma_-, \dots, a_l\Gamma_+ + b_l\Gamma_-)(v) \end{aligned}$$

Таким образом, оценки, выдаваемые алгоритмическим оператором в точках с одинаковым потенциальным отношением, различаются положительным множителем, и, следовательно, имеют одинаковый знак.

**Достаточность.** Пусть выполнено условие (\*). Тогда все прецеденты распадаются на классы эквивалентности по отношению «равенство соответствующих потенциальных отношений», причём каждый класс эквивалентности отклассифицирован одинаково («классы эквивалентности однородны в смысле классификаций»).

1) Фиксируем некоторый класс эквивалентности с потенциальным отношением  $\hat{d} \in \mathbb{R}$  и классификацией  $y \in \mathfrak{J}_f \setminus \{\Delta\}$ . Построим алгоритмический оператор, ставящий прецедентам выбранного класса эквивалентности оценки, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{cases} 0 < \Gamma_+^u \leq 1, & \text{если } y = K_1 \\ -1 \leq \Gamma_+^u < 0, & \text{если } y = K_2 \end{cases},$$

а всем остальным прецедентам — оценки, модули которых больше единицы.

Рассмотрим подробно случай  $y = K_1$ . Далее потребуются следующие два значения: наибольшее в рассматриваемом классе эквивалентности значение  $K_1$ -потенциала  $\Gamma_+^{max\_in\_class}$ , и наибольшее среди вообще всех значений  $K_1$ -потенциала  $\Gamma_+^{max}$ .

1. Построим сначала вспомогательный оператор  $B_1 = \Gamma_+ + (-\hat{d})\Gamma_-$ , ставящий выбранному классу эквивалентности оценку нуль, а всем остальным прецедентам — отличную от нуля оценку. Рассмотрим минимальный модуль оценок прецедентов *не* из рассматриваемого класса эквивалентности:

$$\varepsilon = \min_{i=\overline{1,q}: \frac{\Gamma_+^i}{\Gamma_-^i} \neq \hat{d}} |\Gamma_+^i + (-\hat{d})\Gamma_-^i| = \min_{i=\overline{1,q}: D_i^\pm \neq \hat{d}} |(D_i^\pm - \hat{d})\Gamma_-^i|.$$

Приведенное выражение показывает, что эта величина отлична от нуля.

2. Масштабируя оператор  $B_1$  в  $m$  раз, получаем второй вспомогательный оператор  $B_2 = mB_1 = m\Gamma_+ + (-m\hat{d})\Gamma_-$ . Значение  $m$  будет уточнено далее. Минимальный модуль оценок прецедентов *не* из рассматриваемого класса эквивалентности теперь равен  $m\varepsilon$ .

3. Увеличивая коэффициент при  $\Gamma_+$ , делаем оценки за рассматриваемый класс эквивалентности большими нуля и меньшими или равными единице:

$$B_3 = \left( m + \frac{1}{\Gamma_+^{max\_in\_class}} \right) \Gamma_+ + (-m\hat{d})\Gamma_-.$$

Единичную оценку получают прецеденты из рассматриваемого класса значение  $K_1$ -потенциала для которых равно  $\Gamma_+^{max\_in\_class}$ . Модули оценок прецедентов *не* из рассматриваемого класса эквивалентности теперь не меньше  $m\varepsilon - \frac{\Gamma_+^{max}}{\Gamma_+^{max\_in\_class}}$ . Подбирая нужным образом  $m$ , делаем это значение сколь угодно большим. Например, для того чтобы прецеденты *не* из рассматриваемого класса получили оценки, модули которых не меньше двойки, достаточно взять любое  $m \geq \frac{1}{\varepsilon} \left( 2 + \frac{\Gamma_+^{max}}{\Gamma_+^{max\_in\_class}} \right)$ .

Итак, окончательный вид алгоритмического оператора, ставящего прецедентам из рассматриваемого класса эквивалентности оценки из полуинтервала  $(0, 1]$ , а остальным прецедентам — оценки по модулю не меньше  $1 + t$ :

$$B = \left( m + \frac{1}{\Gamma_+^{max\_in\_class}} \right) \Gamma_+ + (-m\hat{d})\Gamma_-, \text{ где}$$

$$m = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + t + \frac{\Gamma_+^{max}}{\Gamma_+^{max\_in\_class}} \right),$$

$$\varepsilon = \min_{i=\overline{1,q}: \frac{\Gamma_+^i}{\Gamma_-^i} \neq \hat{d}} |\Gamma_+^i + (-\hat{d})\Gamma_-^i| = \min_{i=\overline{1,q}: D_i^\pm \neq \hat{d}} |(D_i^\pm - \hat{d})\Gamma_-^i|,$$

$$\Gamma_+^{max\_in\_class} = \max_{i=\overline{1,q}: D_i^\pm = \hat{d}} \Gamma_+^i,$$

$$\Gamma_+^{max} = \max_{i=\overline{1,q}} \Gamma_+^i,$$

$\hat{d}$ — потенциальное отношение рассматриваемого класса эквивалентности.

Для случая  $y = K_2$  выпишем только окончательный вид алгоритмического оператора, ставящего прецедентам из рассматриваемого класса эквивалентности оценки из полуинтервала



$[-1,0)$ , а остальным прецедентам — оценки по модулю не меньше  $1+t$ :

$$B = m\Gamma_+ + \left( -m\hat{d} - \frac{1}{\Gamma_-^{min\_in\_class}} \right) \Gamma_-, \text{ где}$$

$$m = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + t + \frac{\Gamma_-^{min}}{\Gamma_-^{min\_in\_class}} \right),$$

$$\varepsilon = \min_{i=\overline{1,q}: \frac{\Gamma_+^i}{\Gamma_-^i} \neq \hat{d}} |\Gamma_+^i + (-\hat{d})\Gamma_-^i| = \min_{i=\overline{1,q}: D_i^\pm \neq \hat{d}} |(D_i^\pm - \hat{d})\Gamma_-^i|,$$

$$\Gamma_-^{min\_in\_class} = \min_{i=\overline{1,q}: D_i^\pm = \hat{d}} \Gamma_-^i,$$

$$\Gamma_-^{min} = \min_{i=\overline{1,q}} \Gamma_-^i,$$

$\hat{d}$  — потенциальное отношение рассматриваемого класса эквивалентности.

2) Построив, в соответствии с предыдущим пунктом, для каждого класса эквивалентности алгоритмические операторы, ставящие прецедентам из выбранного класса эквивалентности оценки «правильного» знака из интервала  $[-1,1]$ , а остальным прецедентам оценки по модулю не меньше  $1+t$ , получим локальный базис для исходной задачи. Теорема полностью доказана.

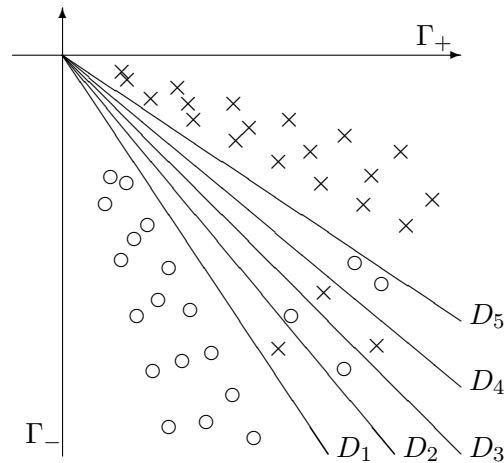
**Замечание.** В случае невыполнения критерия существования корректного алгоритма, описанное построение с незначительными коррективами позволяет получить оптимальный в смысле функционала количества ошибок алгоритм. Для получения оптимального алгоритма следует разбить вектор потенциальных отношений на классы эквивалентности (теперь в классе допускается различная классификация прецедентов); выполнить построения, описанные при доказательстве достаточности для однородных (в смысле классификации) классов эквивалентности; а для неоднородных классов выбрать более выгодную в смысле количества ошибок альтернативу ( $y = K_1$  или  $y = K_2$ ) и также применить описанное построение.

**4. Свойства дискриминантных поверхностей, соответствующих алгоритмам в рассматриваемых моделях.** До сих пор не был освещён вопрос о поиске в исходной модели алгоритмов  $\mathfrak{M}$  оптимального в смысле функционала количества ошибок алгоритма. Для этого удобно рассмотреть аналогичное оценочное пространство  $\mathfrak{Z}'_e = \mathbb{R}^2$ . Модель алгоритмических операторов и решающее правило при этом также нуждаются в переформулировке:

$$\mathfrak{M}'_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ B: \mathfrak{Z}_i \rightarrow \mathfrak{Z}'_e \mid \forall \tilde{u} \in \mathfrak{Z}_i : B(\tilde{u}) = (a\Gamma_+(\tilde{u}), b\Gamma_-(\tilde{u})), a, b \in \mathbb{R}^+ \}$$

$$C'_1(\gamma_+, \gamma_-) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} K_1, & \gamma_+ + \gamma_- > 0 \\ \Delta, & \gamma_+ + \gamma_- = 0 \\ K_2, & \gamma_+ + \gamma_- < 0 \end{cases} .$$

Ясно, что новая модель алгоритмов  $\mathfrak{M}' = C'_1 \circ \mathfrak{M}'_0$  совпадает с исходной моделью алгоритмов  $\mathfrak{M}$ . Для новой формулировки определения модели алгоритмов существует наглядная графическая интерпретация.



Здесь изображено оценочное пространство  $\mathcal{I}'_f = \mathbb{R}^2$ ; «крестики» обозначают оценки прецедентов класса  $K_1$ , «нолики» — оценки прецедентов класса  $K_2$ , выдаваемые алгоритмическим оператором с параметрами  $a = 1, b = 1$ . Абсцисса есть значение  $K_1$ -потенциала, а ордината — значение  $K_2$ -антипотенциала. В наших обозначениях дискриминантной поверхности, соответствующей алгоритмическому оператору  $B(\tilde{u}) = a\Gamma_+(\tilde{u}) + b\Gamma_-(\tilde{u})$ , является луч  $D(B) : (\gamma_+, \gamma_-) \in D \Leftrightarrow a\gamma_+ + b\gamma_- = 0$ . Точки, расположенные выше  $D(B)$ , относятся алгоритмом  $S'_1 \circ B$  к классу  $K_1$ , ниже  $D(B)$  — к классу  $K_2$ , точки луча — к классу  $\Delta$ .

Для поиска оптимального в смысле функционала количества ошибок алгоритма в приведённом примере достаточно перебрать алгоритмы, соответствующие лучам  $D_1, D_2, D_3, D_4$  и  $D_5$ . Непосредственным подсчётом количества ошибок алгоритмов легко убедиться, что оптимальными являются алгоритмы, соответствующие лучам  $D_3$  и  $D_5$ . В общем случае, оптимальный в смысле количества ошибок алгоритм из модели  $\mathcal{M}$  можно найти, вычислив не более  $q' + 1$  функционалов количества ошибок, где  $q'$  — количество классов эквивалентности по отношению «равенство потенциальных отношений».

В расширенной модели алгоритмов  $\mathcal{F}[\mathcal{M}]$  дискриминантные поверхности также поддаются описанию в терминах аналогичного оценочного пространства  $\mathcal{I}'_i$ . Каждому алгоритмическому оператору — аргументу корректирующей операции — соответствует «сектор компетентности», в пределах которого, дискриминантной поверхностью является луч, соответствующий этому оператору. В действительности, «сектором компетентности» является объединение некоторых секторов в  $\mathcal{I}'_i$ , в связи с этим вопрос о поиске алгоритма, минимизирующего в совокупности количество ошибок и количество задействованных алгоритмических операторов, представляется нетривиальным.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 04-01-00161 и стипендии компании *Intel Technologies, Inc* для студентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлёв Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. В сб. <Проблемы кибернетики>. Вып. 33. М., <Наука>, 1978, стр. 5–68.
2. Рудаков К.В. Алгебраическая теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания. — Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. М.: ВЦ РАН, 1992.
3. Воронцов К.В. Проблемно-ориентированные методы алгебраического подхода. — 2002.

Кафедра математических методов  
прогнозирования ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
16.04.2005 г.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ТОНКОГО ПЛАЗМЕННОГО ЖГУТА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

© 2005 г. И. В. Дьяченко

**1. Введение.** В физике плазмы изучается поведение достаточно большого коллектива заряженных частиц, свойства которого определяются дальнедействующими кулоновскими силами, причем его плотность настолько мала, что сила взаимодействия с соседними частицами много меньше кулоновского взаимодействия с далекими частицами. Иными словами, классическая плазма - это ионизированный газ малой плотности. При изучении плазмы рассматриваются не свойства вещества, а свойства сложной системы, состоящей из вещества и электромагнитного поля.

Плазму можно описывать с помощью двух моделей, а именно либо в рамках кинетической теории, либо в рамках магнитной гидродинамики. При МГД-приближении учитывается только существенная характеристика ионизированного газа - способность проводить ток, пренебрегая парными столкновениями частиц.

В рамках МГД-приближения описывается широкий спектр практических задач. Для управления термоядерным процессом необходимо удерживать газ в плазменном состоянии, единственную возможность для этого дают электромагнитные поля. Поэтому важен вопрос выбора соответствующей равновесной конфигурации. Она может быть устойчивой или, если она неустойчива, должна иметь столь большое время нарастания, которое было бы достаточно для протекания ядерных реакций. На первых стадиях проектирования как равновесную конфигурацию, так и ее устойчивость можно исследовать в рамках МГД-теории. Если предложенная конфигурация магнитогидродинамически неустойчива, то практически нет надежды, что она окажется устойчивой при более точном рассмотрении. Простые равновесные конфигурации могут оказаться неустойчивыми, но с помощью особых конфигураций внешних магнитных полей и проводников их иногда можно сделать устойчивыми. В рамках магнитной гидродинамики могут быть описаны многие электродинамические свойства лабораторной и космической плазмы. Хотя основные характеристики звезд и их эволюция не связаны тесно с электромагнетизмом, имеется ряд важных областей, в которых он играет большую роль. Множество работ посвящено наличию глобальных магнитных полей звезд, связанных с их вращением [3,4]. Свойство магнитных полей замедлять конвективное перемешивание имеет большое значение для переноса энергии из глубин к поверхности. Один из примеров проявления локальных сильных магнитных полей, действующих подобным образом, - солнечные пятна. С электромагнитными эффектами и магнитными полями связаны солнечные вспышки, явление конденсации звезд из космических газовых облаков.

В окрестностях Земли многие свойства ионосферы и магнитосферы, а также плазмы в прилегающем пространстве являются по характеру магнитогидродинамическими. Поток плазмы от Солнца (солнечный ветер) и его взаимодействие с геомагнитным полем представляют собой замечательный пример МГД-свойств. Глобальные свойства магнитосферы хорошо описываются МГД-теорией именно в бесстолкновительном варианте. Например, падение напряженности поля у земной поверхности в течение основной фазы магнитной бури связано с вторжением дополнительной плазмы во внешние области поля Земли (на расстоянии до 10 земных радиусов от ее центра). Увеличение давления частиц способствует расширению магнитосферы, увлекающей силовые линии от Земли.

Аналитическое исследование МГД - системы, объединяющей большое число разных по своему характеру уравнений, предполагает максимальное упрощение, идеализацию. Современный уровень развития компьютерного моделирования позволяет рассматривать задачи физики плазмы в более реальной постановке. С помощью расчетов на компьютере можно провести детальный количественный анализ процесса, оценить роль отдельных факторов в его протекании, выявить новые свойства и закономерности, рассмотреть сложные коллективные явления.

Методы математического моделирования имеют большое значение для сопоставления результатов теории и эксперимента. Установление между ними количественного соответствия усложнено тем, что многие величины, которые фигурируют в выводах теории, непосредственно не наблюдаются и не измеряются. На основе теоретических представлений строится математическая модель процесса и проводится ее полный расчет. В частности, определяются все измеряемые в эксперименте величины. По степени близости результатов расчета и эксперимента можно судить о соответствии модели реальным процессам, и в случае необходимости вносить в модель коррективы.

В дальнейшем, когда модель хорошо "отлажена", основана на надежном теоретическом фундаменте, успешно прошла проверку критерием практики математическая модель используется для прогноза. Прогноз очень полезен при планировании эксперимента. Он позволяет провести всю подготовку целенаправленно, заранее определить наиболее интересные режимы, определить области параметров, в которых изучаемые зависимости подвержены наиболее резким изменениям.

В частности, на основе численных расчетов было сделано открытие токового слоя и впервые обнаружен эффект неустойчивости баллоных мод в токамаках [17].

Предметом изучения в данной работе является математическое моделирование процесса формирования токовых слоев в трехмерной конфигурации. Суть эффекта состоит в том, что в замагниченной плазме при определенных условиях самопроизвольно могут возникать зоны относительно высокой температуры. Эти зоны, T-слои, обладают повышенной проводимостью. В результате в них собирается основная часть плазменного тока, разогревающего плазму и поддерживающего в нем высокую температуру [17].

При уменьшении толщины токового слоя происходит быстрая диссипация магнитной энергии, связанная с перезамыканием силовых линий. В результате чего изменяется локальная и глобальная структура поля [15].

Представление об аннигиляции и быстром перезамыкании магнитного поля в окрестности нейтральной точки возникло в связи с вопросами интерпретации наблюдений солнечных вспышек. Данжи был первым [3], кто выдвинул идею о том, что в окрестности точки X-типа проявляются необычные свойства электромагнитного поля, в частности происходит быстрая диссипация магнитного поля. В работах Свита [3] это явление было впервые описано как сближение двух противоположно направленных полей с последующим перезамыканием силовых линий и перестройкой топологии этих полей. Паркер нашел скорость перезамыкания, исходя из основных законов сохранения.

Дальнейшее развитие эта задача получила в работах Печека. Печек предложил [3] альтернативную конфигурацию, в которой сближение противоположно направленных полей происходит только в узкой диффузионной области, ширина которой сравнима с толщиной слоя. Другими словами, два противоположно направленных поля могут образовывать узкие вершины в местах сближения, причем скорость сближения и перезамыкания может достигать до  $(10^{-2} \div 10^{-1} V_a)$ , где  $V_a$  - альфвеновская скорость.

Существенный вклад в эти исследования был внесен С.И. Сыроватским, который впервые рассмотрел общую нестационарную задачу о динамике высокопроводящей сжимаемой плазмы в магнитных полях, содержащих нулевые линии. В результате был получен фундаментальный вывод о возможности кумуляции магнитной энергии при формировании токового слоя в окрестности нулевой линии магнитного поля [19].

Для описания формирования токовых слоев весьма эффективно МГД - приближение. В этом приближении поведение плазмы описывается с помощью уравнений для полной массовой плотности, скорости центра масс, температуры и уравнений Максвелла. В связи с существенной нелинейностью изучаемых процессов представить трехмерное движение плазмы в виде суперпозиции известных автомодельных решений невозможно, поэтому используется численное моделирование МГД - уравнений. Для решения этой задачи применялся полунейвный метод, являющийся разновидностью схемы предиктор-корректор.

## 2. Постановка задачи.

**2.1. Исходные магнитогидродинамические уравнения.** Для описания процессов в плазме будем исходить из уравнений магнитной гидродинамики [1] [2], которые достаточно

хорошо описывают крупномасштабные движения в плазме, для которых несущественно различие в движении отдельных групп составляющих ее частиц.

Пусть плазма состоит из двух сортов частиц - ионов и электронов. Будем рассматривать плазму, в которой выполняется условие квазинейтральности, т.е. приближенное равенство плотности электронов  $n_e$  и ионов  $n_i$  (при условии, что последние однократно ионизированы) или равенства  $n_e = Zn_i$  (в более общем случае ионов со средним зарядовым числом  $Z$ ). Плазма рассматривается как сплошная среда. Это предположение применимо, когда характерная длина изменений превышает характерные размеры области, занимаемой плазмой. Кроме того, считаем, что все происходящие в плазме движения медленные, т.е. протекают со скоростью, значительно меньшей скорости света.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть  $\rho$  есть массовая плотность,  $T$  - температура,  $P$  - давление,  $\vec{V}$  - скорость центра масс,  $\vec{J}$  - плотность электрического тока, а  $\vec{B}$  - напряженность магнитного поля.

Уравнение движения жидкости с учетом силы Ампера записывается в виде

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{c} [\vec{J}, \vec{B}] - \nabla P, \quad (1)$$

здесь  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla)$  - обозначает "субстанциональную" или лагранжеву производную, определяющую изменение величины при перемещении вместе с движущей частицей плазмы. Плотность тока  $\vec{J}$  определяется из уравнения Максвелла, а именно

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2)$$

в котором пренебрегаем током смещения. Подставляя выражение для плотности электрического тока (2) в уравнение (1) получаем

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \vec{B}, \vec{B}] - \nabla P. \quad (3)$$

Уравнение диффузии магнитного поля с учетом конечной проводимости имеет следующий вид

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{V}, \vec{B}] - \frac{c^2}{4\pi} \text{rot}(\eta \text{rot } \vec{B}), \quad (4)$$

$\eta$  - магнитная вязкость, которая связана с проводимостью  $\sigma$  простым соотношением  $\eta = \frac{1}{\sigma}$ . Так как линии магнитной индукции замкнуты, т.е. в природе отсутствуют свободные магнитные заряды, то для напряженности магнитного поля  $\vec{B}$  должно выполняться следующее условие

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (5)$$

Кроме перечисленных соотношений в систему МГД-уравнений также входят уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0, \quad (6)$$

и уравнение для температуры

$$\frac{\rho}{\gamma - 1} \frac{dT}{dt} = -P \text{div } \vec{V} - \text{div}(K \text{grad } T) + \frac{c^2}{(4\pi)^2} \eta (\text{rot } \vec{B})^2, \quad (7)$$

$K$  - коэффициент теплопроводности,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  - показатель адиабаты.

Система уравнений (1), (2), (4)-(7) называется системой уравнений одножидкостной гидродинамики. Для ее замыкания необходимо добавить уравнение состояния  $P = P(\rho)$ , связывающее между собой давление, плотность и температуру плазмы. В МГД приближении

предполагается, что поведение плазмы сходно с поведением идеального газа, т.е. справедливо уравнение состояния

$$P = \rho T, \quad (8)$$

Таким образом, система магнитогидродинамических уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0, \quad (9)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] - \nabla P, \quad (10)$$

$$\frac{\rho}{\gamma - 1} \frac{dT}{dt} = -P \operatorname{div} \vec{V} - \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) + \frac{c^2}{(4\pi)^2} \eta (\operatorname{rot} \vec{B})^2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{B}] - \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} \vec{B}), \quad (12)$$

$$P = \rho T. \quad (13)$$

**2.2. Уравнения магнитной гидродинамики в безразмерной форме.** Для численного моделирования удобно перейти к безразмерным величинам, для этого сделаем следующие замены переменных

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= B/B_0, & \tilde{\rho} &= \rho/\rho_0, & \tilde{T} &= T/T_0, \\ \tilde{V} &= V/V_a, & \tilde{J} &= 4\pi J/cB_0, \\ \tilde{t} &= t/t_a, & t_a &= l/V_a. \end{aligned} \quad (14)$$

Единицами измерения плотности, температуры, магнитного поля, скорости, плотности электрического тока, времени, длины являются соответственно величины:

$$\rho_0, \quad T_0, \quad B_0, \quad V_a, \quad cB_0/4\pi, \quad t_a, \quad l \quad (15)$$

Здесь  $\rho_0, T_0$ , - начальные значения плотности и температуры плазмы,  $B_0$  - максимальная величина первоначального магнитного поля,  $l$  - характерный размер, -  $V_a = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$  альфвенская скорость.

Сделав указанную выше замену переменных, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div} \tilde{\rho} \vec{V} = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{\rho} \frac{d\vec{V}}{d\tilde{t}} = -\frac{\beta}{2} \nabla \tilde{P} + [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}], \quad (17)$$

$$\frac{\tilde{\rho}}{\gamma - 1} \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} + \tilde{P} \operatorname{div} \vec{V} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \tilde{T}) + \frac{2\nu_m}{\beta} (\operatorname{rot} \vec{B})^2, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tilde{t}} = \operatorname{rot}[\vec{V}, \vec{B}] - \operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} \vec{B}), \quad (19)$$

$$\tilde{P} = \tilde{\rho} \tilde{T}. \quad (20)$$

Безразмерный параметр  $\beta$ , равный отношению давления плазмы к магнитному давлению на границе, определяется следующим образом

$$\beta = \frac{8\pi P_0}{B_0^2}. \quad (21)$$

Безразмерная величина  $\nu_m = \frac{c^2 \eta}{4\pi V_a}$ , где  $V_a$  - альфвеновская скорость, коэффициент теплопроводности  $k = \frac{c_p}{P_e}$ , где  $P_e = \frac{c_p \rho_0 V_a}{K}$  - число Пекле. Далее везде будем рассматривать только безразмерные величины, поэтому знак  $\sim$  можно опустить.

**3. Численные методы решения.** Уравнения газовой динамики и тем более магнитной гидродинамики даже в самом простом одномерном случае весьма сложны, и сложность, прежде всего, заключается в их нелинейности. Несмотря на то, что аналитические методы решения задач достаточно давно и весьма интенсивно развиваются, построены решения в явном виде лишь для ограниченного числа задач.

Наиболее эффективным средством исследования задач газовой динамики являются численные методы. Суть метода состоит в следующем. В рассматриваемой области пространства вместо непрерывной среды вводится ее разностный аналог. Эта дискретная модель среды описывается функциями дискретного аргумента, которые определены в конечном числе точек - узлах сетки. Дифференциальная задача аппроксимируется системой разностных уравнений.

Самым простым методом решения разностных уравнений является явная схема. Но при этом, явная схема имеет один существенный недостаток, ограничение на выбор временного шага и шагов по пространству. Для устойчивости схемы они должны удовлетворять условию Куранта  $\tau < \frac{h^2}{2}$ , где  $\tau$  - шаг по времени,  $h$  - шаг по пространству.

В отличие от явных схем, при применении неявной схемы для нахождения величин на очередном временном слое решается система разностных уравнений. Неявные схемы безусловно устойчивы, они позволяют использовать большой шаг по времени, но при их использовании приходится решать более сложные алгебраические задачи.

Широкое применение при решении задач гидродинамики и магнитной гидродинамики получила схема предиктор-корректор Лакса-Вендрофа [12], в которой предиктор предложен в виде явной разностной схемы. Эта схема проста в реализации, условно устойчива и имеет второй порядок точности.

С развитием трехмерного математического моделирования все чаще стали использоваться полунеявные численные методы. Эти методы позволяют избавиться от обращения матриц большой размерности при решении алгебраических систем, вместе с тем, в методе отсутствует неустойчивость, присущая явным схемам.

Мы для численного моделирования будем использовать полунеявный метод, описанный в работах Харнеда, Шнака и Кернера [11-13]. Этот метод является разновидностью схемы предиктор-корректор.

Введем сетку по времени

$$\omega_\tau = \{t_n = b\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (22)$$

Алгоритм предлагаемого метода следующий. На первом шаге (предикторе) вычисляются промежуточные значения всех компонент, входящих в систему МГД-уравнений

$$\vec{V}^* = \vec{V}^n + \alpha \Delta t \vec{F}_v(\rho, \vec{V}, \vec{B}, P)^n, \quad (23)$$

где

$$\vec{F}_v(\rho, \vec{V}, \vec{B}, P) = -(\vec{V}, \nabla) \vec{V} - \frac{\beta}{2\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}], \quad (24)$$

$$\rho^* = \rho^n - \alpha \Delta t \text{div}(\rho \vec{V})^n, \quad (25)$$

$$\vec{B}^* = \vec{B}^n + \alpha \Delta t \text{rot}[\vec{V}^n, \vec{B}^n], \quad (26)$$

$$T^* = T^n - \alpha \Delta t \left( (\vec{V}^n, \nabla) T^n - \frac{\gamma - 1}{\rho^n} F_T(\vec{B}, \vec{V}, T, P) \right) \quad (27)$$

здесь

$$F_T(\vec{B}, \vec{V}, T, P) = -P \text{div} \vec{V} - \text{div}(k \text{grad} T) + \frac{2\nu_m}{\beta} (\text{rot} \vec{B})^2, \quad (28)$$

$$P^* = \rho^* B^*. \quad (29)$$

$\alpha$  - параметр схемы, который может принимать значения  $0.5 \leq \alpha \leq 1.0$ . Неявный элемент входит в уравнение-корректор для скорости

$$\vec{V}^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{\rho^*} (\text{rotrot} \vec{V}^{n+1}) = \vec{V}^n + \Delta t \vec{F}_v(\rho, \vec{V}, \vec{B}, P)^* - \frac{\Delta t^2}{\rho^n} (\text{rotrot} \vec{V}^n). \quad (30)$$

Вычисленная скорость используется для нахождения магнитного поля, плотности, температуры и давления на следующем временном шаге.

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \frac{\Delta t}{2} \text{div}(\rho(\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n)), \quad (31)$$

$$\vec{B}^{**} = \vec{B}^n + \frac{\Delta t}{2} \text{rot}[(\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n), \vec{B}^*], \quad (32)$$

$$T^{n+1} = T^n - \Delta t \left( \left( \frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2}, \nabla \right) T^* - \frac{\gamma - 1}{\rho^*} F_T \left( \vec{B}^*, \frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2}, T^*, P^* \right) \right) \quad (33)$$

$$P^{n+1} = \rho^{n+1} T^{n+1}. \quad (34)$$

И, наконец, последний шаг алгоритма, на котором вычисляется величина магнитного поля

$$\vec{B}^{n+1} + \Delta t \text{rot}(\nu_0 \text{rot} \vec{B}^{n+1}) = \vec{B}^{**} - \Delta t \text{rot}(\nu_m \text{rot} \vec{B}^{**}) + \Delta t \text{rot}(\nu_0 \text{rot} \vec{B}^{**}). \quad (35)$$

Этот метод устойчив [12], если выполняется условие

$$\nu_0^2 > \frac{\nu_m(1 + 2\alpha)^2}{16}. \quad (36)$$

Для обращения матриц в уравнениях [30] и [35] используется метод Жордана.

**4. Выбор области моделирования. Задание граничных условий.** При выборе области моделирования в первую очередь руководствуются той совокупностью задач, решения которых хотели бы получить с помощью этой модели. Также не последнюю роль играет удобство представления области в тех координатах, в которых производится моделирование. Так, например, в декартовых координатах удобнее выбирать расчетную область в виде прямоугольного параллелепипеда, в то время как в цилиндрических координатах такой выбор приведет к ряду вычислительных трудностей, связанных с представлением границы области. В цилиндрических координатах целесообразно выбирать цилиндрическую область моделирования.

До сих пор численное моделирование проводилось в декартовых координатах [15, 16], в которых дифференциальные операторы, входящие в МГД-уравнения, имеют более простой вид. В декартовых координатах проще аппроксимировать уравнения, описывающие магнитогидродинамические процессы, проще строить алгоритмы решения соответствующих алгебраических систем. Однако, при относительной простоте нахождения численного решения, использование декартовых координат имеет ряд недостатков. Во-первых, недостаточно эффективно описываются цилиндрические волны. Во-вторых, в декартовых координатах в качестве области моделирования разумно выбирать (так чаще всего и делают) куб или прямоугольный параллелепипед, что не всегда удобно, поскольку применение вычислительного алгоритма в углах области, как правило, плохо аппроксимируют исходную задачу. Практические приложения этой задачи, в частности, моделирование капиллярных разрядов, и  $\theta$ -пинчей, не совсем удовлетворительно описываются в декартовых координатах.

В задачах с ясно выделенной полярной осью и присутствием сходящихся и расходящихся цилиндрических волн целесообразно использование цилиндрических координат. При переходе



к цилиндрическим координатам мы выигрываем в ясности постановки задачи, но при этом возникают технические трудности, обусловленные особенностями представления операторов теории поля и их разностной аппроксимации в криволинейных координатах.

Цилиндрическая система вводится с помощью следующих соотношений

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z. \quad (37)$$

В новых координатах моделирование удобнее проводить в цилиндрической области. Будем рассматривать цилиндр единичного радиуса, симметричный относительно плоскости  $z = 0$ , что нисколько не ограничивает общность задачи. Действительно, при произвольном цилиндре радиуса  $R$  и высоты  $H$ , всегда можно сделать замену переменных  $r_{\text{новое}} = \frac{r_{\text{старое}}}{R}$ ,  $z_{\text{новое}} = \frac{z_{\text{старое}}}{H}$ , после которой получим область  $\bar{\Omega} = \{0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ . Границу области обозначим  $\omega = \{r = 1, z = \pm 1\}$ .

Будем считать, что на границе скорость и магнитное поле удовлетворяют условию

$$\left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0,$$

т.е. производные всех компонент скорости и магнитного поля по внешней нормали на границах равны нулю. Так как область моделирования была выбрана с учетом специфики системы координат, то производные по нормали становятся просто производными по соответствующей переменной. Распишем условия подробнее для каждой компоненты и на каждой границе. Граничные условия для скорости будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_r}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_z}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \\ \left. \frac{\partial V_r}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_z}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для магнитного поля

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \\ \left. \frac{\partial B_r}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z=\pm 1} = 0. \end{aligned}$$

Для плотности, температуры и давления граничные условия определяются в зависимости от направления вектора скорости. На границе, где плазма втекает в расчетную область, плотность, температура и давление принимают начальные значения. На остальных участках границы ставятся условия свободного вытекания. Например, рассмотрим границу  $r = 1$ . Если  $V_r|_{r=1} > 0$ , то плазма вытекает из расчетной области, следовательно, на этом участке границы для плотности, температуры и давления граничные условия задаются в виде

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=1} = 0.$$

В противном случае ( $V_r|_{r=1} \leq 0$ ), плазма втекает в расчетную область, и на границе значения плотности, температуры и давления будут определяться из начальных условий. В этом случае граничные условия становятся условиями первого рода

$$\rho|_{r=1} = \rho_0, T|_{r=1} = T_0, P|_{r=1} = P_0$$

Аналогично, задаются условия на оставшихся участках границы  $\Gamma$ , определяемых условиями  $z = \pm 1$ .

**5. Дифференциальные операторы и их разностные аналоги в цилиндрических координатах.** Приведем известные формулы, для операторов теории поля, используемых в задаче. Так как существует ряд особенностей их представления в цилиндрических системах координат, то распишем их. Для каждого дифференциального оператора запишем аппроксимирующий его разностный.

Дивергенция:

$$\nabla \vec{A} = \text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (38)$$

Градиент:

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (39)$$

Ротор:

$$(\nabla \times \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad (40)$$

$$(\nabla \times \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (41)$$

$$(\nabla \times \vec{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \quad (42)$$

Производная по направлению  $\vec{A}$  (или субстанциональная производная) для скалярной функции записывается

$$(\vec{A} \cdot \nabla) f = (\vec{A}, \nabla f) = A_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (43)$$

а для вектора  $(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$  имеет следующий вид

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\varphi B_\varphi}{r}, \quad (44)$$

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = A_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{A_\varphi B_r}{r}, \quad (45)$$

$$(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (46)$$

Лапласиан:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (47)$$

Аппроксимируем операторы, входящие в МГД систему разностными аналогами. Пусть  $\omega_r$ ,  $\omega_\varphi$ ,  $\omega_z$  - сетки по радиусу  $r$ , углу  $\varphi$  и высоте  $z$ , соответственно

$$\omega_r = r_i = (i + 0.5)h_r, i = 0, 1, 2, \dots, N_r, h_r = \frac{1}{N_r + 0.5}$$

$$\omega_\varphi = \varphi_j = jh_\varphi, j = 0, 1, 2, \dots, N_\varphi, h_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi},$$

$$\omega_z = z_k = kh_z - 2, k = 0, 1, 2, \dots, N_z, h_z = \frac{2}{N_z}.$$

Введем в  $\bar{\Omega}$  пространственную сетку  $\bar{\omega} = \omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_z$ . Сеточную функцию  $f$  в узле  $(r_i, \varphi_j, z_k, t_n)$  будем обозначать

$$f_{i,j,k}^n = f(r_i, \varphi_j, z_k, t_n).$$

В цилиндрических координатах помимо физических границ, а именно  $r = R$ ,  $z = \pm H/2$  появляются новые  $r = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2\pi$ . Для единственности решения надо задать на этих участках граничные условия, которые, вообще говоря, не определены в постановке задачи. Для  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2\pi$  воспользуемся условием периодичности  $f(0) = f(2\pi)$ . При использовании цилиндрических координат в точке  $r = 0$  может возникнуть особенность. Чтобы избежать этого и определить условия на границе  $r = 0$  вводится особая сетка. Такая сетка, сдвинутая по  $r$ , была предложена в работах Фрязинова и Бакировой [9], [10], [11]. Введем операторы - разностные аналоги производных по каждой переменной. Производную будем  $\frac{\partial f}{\partial r}$  аппроксимировать разностным оператором

$$(\Lambda_r f)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{2h_r},$$

при  $i = 1, 2, \dots, N_r - 1$  при  $i = 0$ , воспользуемся тем, что сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг, тогда  $r_{-1,j} = r_{0,j+N_\varphi/2}$ , а производная будет иметь вид

$$(\Lambda_r f)_{0,j} = \frac{f_{1,j} - f_{0,j+N_\varphi/2}}{h_r},$$

Производную  $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$  аппроксимируем следующим образом

$$(\Lambda_\varphi f)_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h_\varphi}, \quad \text{при } j = 0, 1, 2, \dots, N_\varphi$$

здесь пользуемся свойством периодичности, а именно  $y_{-1} = y_{N_\varphi - 1}$ ,  $y_{N_\varphi + 1} = y_1$ , производную  $\frac{\partial f}{\partial z}$  запишем в виде

$$(\Lambda_z f)_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{2h_z}, \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, N_z - 1.$$

Теперь определим разностные аналоги для дивергенции и трех компонент ротора

$$DIV \vec{A} = \frac{1}{r} \Lambda_r r A_r + \frac{1}{r} \Lambda_\varphi A_\varphi + \Lambda_z A_z,$$

$$(ROT \vec{A})_r = \frac{1}{r} \Lambda_\varphi A_z - \Lambda_z A_\varphi,$$

$$(ROT \vec{A})_\varphi = \Lambda_z A_r - \Lambda_r A_z,$$

$$(ROT \vec{A})_z = \frac{1}{r} \Lambda_r r A_\varphi - \frac{1}{r} \Lambda_\varphi A_r$$

Для производной по направлению введем вспомогательные операторы

$$Lr f_{i,j,k} = \frac{V_{r_{i,j,k}} + |V_{r_{i,j,k}}|}{2h_r} (f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}) + \frac{V_{r_{i,j,k}} - |V_{r_{i,j,k}}|}{2h_r} (f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}),$$

$$L\varphi f_{i,j,k} = \frac{V_{\varphi_{i,j,k}} + |V_{\varphi_{i,j,k}}|}{2h_\varphi} (f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}) + \frac{V_{\varphi_{i,j,k}} - |V_{\varphi_{i,j,k}}|}{2h_\varphi} (f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}),$$

$$Lz f_{i,j,k} = \frac{V_{z_{i,j,k}} + |V_{z_{i,j,k}}|}{2h_z} (f_{i,j,k} - f_{i-1,j,k}) + \frac{V_{z_{i,j,k}} - |V_{z_{i,j,k}}|}{2h_z} (f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}),$$

С помощью этих операторов субстанциональная производная достаточно легко аппроксимируется

$$(W \vec{A})_r = Lr A_r + \frac{1}{r} L\varphi A_r + Lz A_r - \frac{V_\varphi A_r}{r},$$

$$(W \vec{A})_\varphi = Lr A_\varphi + \frac{1}{r} L\varphi A_\varphi + Lz A_r - \frac{V_\varphi A_\varphi}{r},$$

$$(W\vec{A})_z = LrA_z + \frac{1}{r}L\varphi A_z + LzA_z.$$

**6. Заключение.** В качестве иллюстрации приведем результаты первых вычислительных экспериментов по моделированию поведения плотного плазменного жгута в вакууме.

Рассматриваем тонкий плазменный жгут, расположенные вдоль оси  $Oz$ . Жгут представляет собой вещество с заданной плотностью, которое пронизано магнитным полем. Для простоты величину магнитного поля считаем константой, а направление совпадающим с направлением оси  $Oz$  (см рис.1).

В следствии внешних факторов, на верхней и нижней границе цилиндра происходит вращение с одинаковыми угловыми скоростями, но противоположными по направлению. Для всех остальных величин и скорости на боковой границе заданы условия свободного вытекания. На рис.2 представлено магнитное поле  $\vec{B}$  жгута, измененное под действием описанных внешних сил.

Рис.1 Магнитное поле  $\vec{B}$  в момент времени  $t=0$

Рис. 2. Магнитное поле  $\vec{B}$  в момент времени  $t=17$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадамцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
2. *Кролл Н., Трайвелтис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
3. *Паркер Е.* Космические магнитные поля. М.: Мир, 1982.
4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2000.
8. *Фрязинов И.В.* О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971., 11, №5, 1219-1228.
9. *Бакирова М.И., Фрязинов И.В.* Об экономичных разностных схемах решения уравнения теплопроводности в полярных, цилиндрических и сферических координатах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972., 12, №2, 353-362.
10. *Бакирова М.И., Фрязинов И.В.* Об итерационном методе переменных направлений для разностного уравнения Пуассона в криволинейных ортогональных координатах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973., 13, №4, 906-922.
11. *Douglas S. Harned, W. Kerner.* Semi-implicit Method for Three-Dimensional Compressible Magnetohydrodynamic Simulation. Journal of computational physics 60, 62-75, (1985).
12. *Douglas S. Harned, D.D. Schnack.* Semi-implicit Method for long Time Scale Magnetohydrodynamic Computations in Three Dimensions. Journal of computational physics 65, 57-70, (1986).
13. *Douglas S. Harned, W. Kerner.* Semi-implicit Method for Three-Dimensional Resistive Magnetohydrodynamic Simulation of Fusion Plasmas. Journal of computational physics 92, 119-125 (1986).
14. *Буланов С.В., Ечкина Е.Ю., Иновенков И.Н., Пегораро Ф., Пичушкин В.В.* Формирование токовых слоев в структурно-устойчивых и структурно-неустойчивых магнитных конфигурациях с двумя нулевыми линиями. Физика плазмы 2000, том 26, № 7, 600-614.
15. *Bulanov S. V., Echkina E. Yu., Inovenkov I. N., Pegoraro F., Pichushkin V. V.* On the structural stability of magnetic configurations with two null lines. Phys. Plasmas March 1999, Vol. 6, No. 3, 802-815.
16. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
17. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
18. *Буланов С.В., Дудникова Г.И., Жуков В.П., Иновенков И.Н., Пичушкин В.В.* Токовые слои в окрестности критических точек магнитного поля. Влияние эффекта Холла. Численное моделирование формирования токовых слоев. М.: Наука. Физматлит, 1996. (Тр. ИОФАН; Т.51).
19. *Ечкина Е.Ю.* Математическое моделирование процессов формирования и эволюции токовых слоев в двумерных и трехмерных магнитных конфигурациях. Дис. на соискание уч. ст. к. ф.-м. н., Москва 2000.

Кафедра автоматизации научных исследований ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
03.07.2005 г.

# КОРОТКИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПЛОТНОСТЯМИ

© 2005 г. А. А. Михайлова

**1. Введение.** Данная работа посвящена оценке остаточного члена в разложении Эджворта для функции распределения сумм абсолютно непрерывных случайных величин. Рассматриваются короткие асимптотически разложения для функций распределения нормированных (т.е. имеющих нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию) сумм независимых случайных величин.

Результат настоящей работы основан на работе [1], где рассматривается случай одинаково распределенных случайных величин, и обобщает его на случай, когда среди случайных величин выделены блоки одинаково распределенных с.в.

Следует отметить, что автор статьи [1], при доказательстве леммы 2 опирается на теорему, доказанную в статье [2], ошибочно полагая, что она доказана для всех с.в. имеющих конечную полную вариацию. На самом деле в статье [2] эта теорема доказана только для с.в. с одновершинными распределениями. Тем не менее доказательство леммы 2 остается верным, поскольку в работе [3] доказана теорема, в точности повторяющая результат статьи [2] уже для класса с.в. имеющих конечную полную вариацию.

**2. Обозначения и основной результат.** Пусть есть  $n$  независимых абсолютно непрерывных случайных величин, среди которых выделено два блока одинаково распределенных с.в.  $X_1 \dots X_m$  и  $Y_1 \dots Y_k$ ,  $m+k=n$ . Будем считать, что эти с.в. имеют конечные моменты до четвертого порядка включительно -  $\alpha_i^X, \alpha_i^Y, i=1 \dots 4$ , причем  $\alpha_1^X = \alpha_1^Y = 0, \alpha_2^X = \alpha_2^Y = 1$ . Обозначим через  $f_X(x), f_Y(x)$  и  $\psi_X(t), \psi_Y(t)$  плотности распределения и характеристические функции с.в.  $X_j$  и  $Y_j$  соответственно. Пусть также полные вариации  $f_X(x), f_Y(x)$  конечны и равны  $M_X$  и  $M_Y$  соответственно.

Обозначим через  $\Phi(x)$ , и  $\phi(x)$  функцию распределения и плотность стандартного нормального распределения, а через  $F_n(x)$  - функцию распределения нормированной суммы с.в.  $X_1 \dots X_m, Y_1 \dots Y_k$ :

$$F_n(x) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_m + Y_1 + \dots + Y_k}{\sqrt{n}} \leq x\right).$$

Короткое разложение Эджворта для  $F_n(x)$  имеет вид:

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{(m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y)}{6n^{3/2}} (1-x^2) \phi(x) + R_n(x).$$

**Теорема 1.** В указанных условия справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} |R_n(x)| \leq & \frac{2(m\alpha_4^X c_X + k\alpha_4^Y c_Y)}{[n-2(m c_X + k c_Y)]^2} + \frac{(m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y)^2}{9n^3} \\ & + \min \left[ \frac{3M^2 L_0^n}{\alpha_4^2 n}, \frac{(M\alpha_4^{-1})^n}{n} \right] \\ & + \frac{e^{-\alpha_4^2 n/2}}{n} + \frac{\sqrt{2\pi} |m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y|}{4\alpha_4^2 n^{5/2}}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_4 = \min \left[ 1/\sqrt{\alpha_4^X}, 1/\sqrt{\alpha_4^Y} \right]$ ,

$$c_X = c_X(\alpha_4^X) = \alpha_4^X \log \left( \frac{2\alpha_4^X}{2\alpha_4^X - 1} \right) - \frac{11}{24}, \quad c_Y = c_Y(\alpha_4^Y) = \alpha_4^Y \log \left( \frac{2\alpha_4^Y}{2\alpha_4^Y - 1} \right) - \frac{11}{24},$$

$$M = \max [M_X, M_Y], p = \max \left[ p \in \mathbb{N} : p \leq \frac{3M^2}{\alpha_4^2} \right], L_0 = \left( \sqrt{\frac{3}{p+1}} \frac{M}{\alpha_4} \right)^{1/p} < 1.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в следующем пункте.

**3. Доказательство теоремы 1.**

Для получения оценки  $R_n$  воспользуемся методом, примененным в работе [1]. Запишем

$$R_n(x) = F_n(x) - G_n(x),$$

где

$$G_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6n^{3/2}} (1-x^2) \phi(x), \alpha_3 = m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y.$$

Обозначим через  $g_n(t)$  преобразование Фурье-Стилтьеса функции  $G_n(x)$ :

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG_n(x) = e^{-t^2/2} \left( 1 - i \frac{\alpha_3}{6n^{3/2}} t^3 \right).$$

В соответствии с формулой обращения, для  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ :

$$R_n(x) - R_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \left[ \psi_X^m \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \psi_Y^k \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g_n(t) \right] dt.$$

Заметим, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sup_y |R_n(x) - R_n(y)| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-1} \left| \psi_X^m \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \psi_Y^k \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g_n(t) \right| dt \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-1} \left| \psi_X^m(t) \psi_Y^k(t) - g_n(t\sqrt{n}) \right| dt \\ &\leq \frac{2}{\pi} (I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= \int_0^{\alpha_4} t^{-1} \left| \psi_X^m(t) \psi_Y^k(t) - g_n(t\sqrt{n}) \right| dt, \\ I_{n,2} &= \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} \left| \psi_X^m(t) \psi_Y^k(t) \right| dt, \\ I_{n,3} &= \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} |g_n(t\sqrt{n})| dt \end{aligned}$$

и  $\alpha_4 = \min \left[ 1/\sqrt{\alpha_4^X}, 1/\sqrt{\alpha_4^Y} \right]$ .

Оценки для  $I_{n,1}, I_{n,2}, I_{n,3}$  приведены в следующем разделе в виде лемм. Из последнего неравенства и лемм 3, 4, 5 следует утверждение теоремы.  $\square$

**4. Леммы.** Для получения оценок  $I_{n,1}, I_{n,2}, I_{n,3}$  нам понадобятся две вспомогательные леммы, доказанные в работе [1].

**Лемма 1.** Пусть  $\psi(t)$  - х.ф. некоторой с.в., такой что ее моменты  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3,$  и  $\alpha_4$  - конечны. Тогда для  $\psi(t)$  в области  $0 \leq t \leq \alpha_4^{-1/2}$  справедливо следующее представление:

$$\psi(t) = \exp \left( -\frac{t^2}{2} - i \frac{\alpha_3}{6} t^3 + A\alpha_4 t^4 \right),$$

где  $|A| \leq c(\alpha_4) = \alpha_4 \log(2\alpha_4/(2\alpha_4 - 1)) - 11/24$ .

**Лемма 2.** Пусть  $f(x)$  - плотность распределения некоторой с.в., причем ее полная вариация  $M$  - конечна. Тогда, если  $M^*$  - полная вариация  $f^{*n}(x)$ , выполнено неравенство:

$$M^* \leq \sqrt{\frac{3}{n+1}} M.$$

**Лемма 3.** Справедливо неравенство:

$$I_{n,1} \leq \frac{2(m\alpha_4^X c_X + k\alpha_4^Y c_Y)}{[-n + 2(mc_X + kc_Y)]^2} + \frac{(m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y)^2}{9n^3},$$

где  $c_X$  и  $c_Y$  определены в теореме 1.

**Доказательство.** По лемме 1  $I_{n,1}$  представим в виде:

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= \int_0^{\alpha_4} t^{-1} \left| \psi_X^m(t) \psi_Y^k(t) - g_n(t\sqrt{n}) \right| dt \\ &= \int_0^{\alpha_4} t^{-1} \left| e^{(-t^2/2 - i\alpha_3^X t^3/6 + A_X \alpha_4^X t^4)m} e^{(-t^2/2 - i\alpha_3^Y t^3/6 + A_Y \alpha_4^Y t^4)k} - e^{-t^2n/2} \left(1 - i\frac{\alpha_3 t^3}{6}\right) \right| dt \\ &= \int_0^{\alpha_4} t^{-1} e^{-t^2n/2} \left| e^{(-i\alpha_3 t^3/6 + (mA_X \alpha_4^X + kA_Y \alpha_4^Y)t^4)} - 1 + i\frac{\alpha_3 t^3}{6} \right| dt. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} |A_X| &\leq c_X = c_X(\alpha_4^X) = \alpha_4^X \log\left(\frac{2\alpha_4^X}{2\alpha_4^X - 1}\right) - \frac{11}{24}, \\ |A_Y| &\leq c_Y = c_Y(\alpha_4^Y) = \alpha_4^Y \log\left(\frac{2\alpha_4^Y}{2\alpha_4^Y - 1}\right) - \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

Далее, используя неравенства  $|e^{x+iy} - 1| \leq |x + iy| e^{|x+iy|}$ ,  $|e^{iy} - 1 - iy| \leq y^2/2$ , верные для  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , получим:

$$\begin{aligned} I_{n,1} &\leq \int_0^{\alpha_4} t^{-1} e^{-t^2n/2} \left| e^{(mA_X \alpha_4^X + kA_Y \alpha_4^Y)t^4} - 1 \right| dt + \int_0^{\alpha_4} t^{-1} e^{-t^2n/2} \left| e^{-i\alpha_3 t^3/6} - 1 + i\frac{\alpha_3 t^3}{6} \right| dt \\ &\leq (m\alpha_4^X c_X + k\alpha_4^Y c_Y) \int_0^{\alpha_4} t^3 e^{-t^2n/2 + (mc_X + kc_Y)t^2} dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{6}\right)^2 \int_0^{\alpha_4} t^5 e^{-t^2n/2} dt \\ &\leq \frac{2(m\alpha_4^X c_X + k\alpha_4^Y c_Y)}{[-n + 2(mc_X + kc_Y)]^2} + \frac{(m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y)^2}{9n^3}. \quad \square \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Справедливо неравенство:

$$I_{n,2} \leq \min \left[ \frac{3M^2 L_0^n}{\alpha_4^2 n}, \frac{(M\alpha_4^{-1})^n}{n} \right],$$

где  $M = \max[M_X, M_Y]$ ,  $L_0 = \text{const} < 1$ .



**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  - плотность распределения некоторой с.в.,  $\psi(t)$  ее характеристическая функция, а  $M < \infty$  - полная вариация  $f(x)$ . Тогда:

$$|\psi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \right| = \left| -\frac{1}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} df(x) \right| \leq \frac{M}{|t|} \quad (1)$$

Введем дополнительные обозначения. Пусть

$$M = \max [M_X, M_Y],$$

$$p = \max \left[ p \in \mathbb{N} : p \leq \frac{3M^2}{\alpha_4^2} \right],$$

$$L \equiv \sqrt{\frac{3}{p+1}} \frac{M}{\alpha_4} < 1.$$

Если выполнено условие  $M\alpha_4^{-1} \leq 1$ , тогда, с учетом неравенства (1), оценим  $I_{n,2}$  следующим образом:

$$I_{n,2} = \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} |\psi_X^m(t) \psi_Y^k(t)| dt \leq \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} \frac{M_X^m M_Y^k}{t^n} dt$$

$$= \frac{M_X^m M_Y^k}{\alpha_4^n n} \leq \frac{(M\alpha_4^{-1})^n}{n}.$$

В противном случае, с учетом леммы 2, получим:

$$I_{n,2} = \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} |\psi_X^m(t) \psi_Y^k(t)| dt = \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} |\psi_X^p(t)|^{m/p} |\psi_Y^p(t)|^{k/p} dt$$

$$\leq (M_X^m M_Y^k)^{1/p} \left( \sqrt{\frac{3}{p+1}} \right)^{n/p} \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1-n/p} dt$$

$$\leq \frac{p}{n} \left( \frac{M}{\alpha_4} \right)^{n/p} \left( \sqrt{\frac{3}{p+1}} \right)^{n/p} \leq \frac{3M^2}{\alpha_4^2} \frac{L_0^n}{n},$$

где  $L_0 = L^{1/p} < 1$ .  $\square$

**Лемма 5.** *Справедливо неравенство:*

$$I_{n,3} \leq \frac{e^{-\alpha_4^2 n/2}}{n} + \frac{\sqrt{2\pi} |m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y|}{4\alpha_4^2 n^{5/2}}$$

**Доказательство.** Для оценки  $I_{n,3}$  воспользуемся стандартными рассуждениями:

$$I_{n,3} = \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} |g_n(t\sqrt{n})| dt = \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} e^{-t^2 n/2} \left| 1 - \frac{i\alpha_3 t^3}{6} \right| dt \leq \int_{\alpha_4}^{\infty} t^{-1} e^{-t^2 n/2} \left( 1 + \frac{|\alpha_3| t^3}{6} \right) dt$$

$$\leq \frac{e^{-\alpha_4^2 n/2}}{n} + \frac{\sqrt{2\pi} |m\alpha_3^X + k\alpha_3^Y|}{4\alpha_4^2 n^{5/2}}. \quad \square$$

**5. Обобщения.** В общем случае, когда имеется  $s \leq n$  блоков одинаково распределенных с.в. (при этом  $s$  не зависит от  $n$ ), получаем следующую оценку  $R_n$  (будем использовать аналогичные обозначения):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} |R_n(x)| &\leq \frac{2 \sum_{j=1}^s m_j c_j \alpha_4^j}{\left[-n + 2 \sum_{j=1}^s m_j c_j\right]^2} + \frac{\left(\sum_{j=1}^s m_j \alpha_3^j\right)^2}{9n^3} \\ &\quad + \min \left[ \frac{3M^2 L_0^n}{\alpha_4^2 n}, \frac{(M\alpha_4^{-1})^n}{n} \right] \\ &\quad + \frac{e^{-\alpha_4^2 n/2}}{n} + \frac{\sqrt{2\pi} \left| \sum_{j=1}^s m_j \alpha_3^j \right|}{4\alpha_4^2 n^{5/2}}, \\ \alpha_4 &= \min_j \left[ 1/\sqrt{\alpha_4^j} \right], \quad c_j \left( \alpha_4^j \right) = \alpha_4^j \log \left( \frac{2\alpha_4^j}{2\alpha_4^j - 1} \right) - \frac{11}{24}, \end{aligned}$$

$$M = \max_j [M_j], \quad p = \max \left[ p \in \mathbb{N} : p \leq \frac{3M^2}{\alpha_4^2} \right], \quad L_0 = \left( \sqrt{\frac{3}{p+1}} \frac{M}{\alpha_4} \right)^{1/p} < 1, \quad j = 1 \dots p.$$

Доказательство аналогично проведенному для случая двух блоков.

**6. Примеры.** Пусть  $X_j$  имеют двустороннее экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda = \sqrt{2}$ , тогда  $\alpha_1^X = 0$ ,  $\alpha_2^X = 1$ ,  $\alpha_3^X = 0$ ,  $\alpha_4^X = 3$ ,  $M_X = \sqrt{2}$ ; а  $Y_j$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ , тогда  $\alpha_1^Y = 0$ ,  $\alpha_2^Y = 1$ ,  $\alpha_3^Y = 0$ ,  $\alpha_4^Y = 12/5$ ,  $M_Y = 1/\sqrt{3}$ .

Далее представлены верхние оценки для  $|R_n|$ , вытекающие из теоремы 1:

**Таблица 2.** Верхние оценки для  $|R_n|$  при различных значениях  $m$ ,  $k$  и  $n$

$n$	$k$	$m$	$ R_n $
20	15	5	0,118697452
35	25	10	0,066872946
50	35	15	0,046750285
65	45	20	0,035952353
80	55	25	0,029207626
95	65	30	0,024593863
110	75	35	0,021238881
125	85	40	0,018689364
140	95	45	0,016686334
155	105	50	0,015071092
170	115	55	0,013740962
185	125	60	0,012626578
200	135	65	0,011679386
215	145	70	0,010864387

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ryoichi Shimizu.* On the remainder term for the central limit theorem, 1974.
2. *Рогозин Б.А.* О максимуме плотности вероятности суммы случайных величин с одновершинным распределением // Литовский математический сборник, выпуск 3, том 5, 1965 г.
3. *Рогозин Б.А.* Оценка максимума свертки ограниченных плотностей // Теория вероятностей и ее применения, выпуск 1, том 332, 1987 г.

Кафедра математической статистики  
ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
13.05.2004 г.

УДК 519.816.4:517.977.54

## ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

© 2005 г. К. С. Сорокин

**Введение.** Новые тенденции в экономике потребовали, чтобы в математических моделях экономической динамики учитывались, во-первых, многокритериальный "характер" задачи, во-вторых, наличие в системе неопределенного фактора и, наконец, в третьих, требование оптимального сочетания исходов (значений критериев) и рисков по всем критериям. Такие задачи (без учета рисков) впервые исследовались в [1, 2] с позиции принципа максимальной полезности [3]. Однако указанный подход рассчитан на "катастрофу" и поэтому обычно приводит к "заниженным" гарантиям; кроме того, он не учитывает риски. Избежать этих недостатков позволяет применение подходящей модификации принципа минимаксного сожаления [4]. В данной работе с помощью системы "Maple"\* для конкретной двухкритериальной задачи с линейной динамикой и при неопределенности построен явный вид функций риска, затем, в разделах 3-5 найдены компоненты гарантированного по исходам и рискам решения.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим конкретную двухкритериальную динамическую линейно-квадратичную задачу при неопределенности

$$\langle \Sigma, \mathcal{U}, \mathcal{Z}, \{J_i(U, Z, t_0, x_0)\}_{i=1,2} \rangle. \quad (1)$$

В (1) управляемая динамическая система  $\Sigma$  описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = x + u + z, x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где скалярные  $x$  - фазовая переменная,  $u$  - управляющее воздействие ЛПП (лица, принимающего решение),  $z$  - неопределенный фактор; фиксированный момент  $\vartheta = 1$  окончания процесса управления и начальная позиция  $(t_0, x_0)$ ,  $0 \leq t_0 < \vartheta$ .

В (1) и далее используются два класса стратегий и неопределенностей.

В *первом* при построении гарантированного решения задачи (1) применяется множество  $\mathcal{Z}$  позиционных неопределенностей  $Z$ :

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z(t, x) | z(t, x) = Q(t)x + q(t) \quad \forall Q(\cdot), q(\cdot) \in C[0, \vartheta]\}, \quad (3)$$

и множество  $\mathcal{U}$  позиционных стратегий  $U$ :

$$\mathcal{U} = \{U \div u(t, x) | u(t, x) = P(t)x + p(t) \quad \forall P(\cdot), p(\cdot) \in C[0, \vartheta]\}. \quad (4)$$

Во *втором*, при построении функции риска используется множество  $\mathcal{Z}_t$  программных неопределенностей  $Z_t$ :

$$\mathcal{Z}_t = \{Z_t \div z[t] | \dot{z}[t] = -z[t] + \cos(t) \quad \forall z[t_0] \in \mathbb{R}\}, \quad (5)$$

и множество  $\mathcal{U}_z$  позиционных контрстратегий  $U_z$ :

$$\mathcal{U}_z = \{U_z \div u(t, x, z[t]) | u(t, x, z[t]) = P(t)x + p(t)\}. \quad (6)$$

В (3), (4), (6) могут применяться любые скалярные непрерывные на  $[0, 1]$  функции  $P(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$  - за счет этого и получаются приведенные выше множества; в (5) множество  $\mathcal{Z}_t$  образуется за счет всевозможных скалярных величин  $z[t_0] \in \mathbb{R}$ . Отметим, что в задаче прогнозирования (или планирования) неопределенностью может являться цена выпускаемой

\*Waterloo Maple, Maple 8.00

продукции  $z[t]$  на некотором промежутке времени  $[t_0, \vartheta]$ . В этом случае дифференциальное уравнение  $\dot{z} = -z + b(t)$ ,  $z[t_0] \in \mathbb{R}$  обычно представляет собой модель Эванса установления равновесной цены [6, с. 58-59], а  $z[t_0]$  учитывает возможные скачки цен на рынке сбыта до момента времени  $t_0$ . Наконец, отметим, что в (6) используется  $z[t]$  такое, что для  $Z_t \div z[t]$  имеет место включение  $Z_t \in \mathcal{Z}$ .

Процесс принятия решения в задаче (1) происходит следующим образом. ЛПР выбирает конкретную стратегию  $U \div u(t, x) = P(t)x + p(t)$ ,  $U \in \mathcal{U}$ . Независимо от его действий в задаче (1) реализуется некоторая конкретная неопределенность  $Z \in \mathcal{Z}$ ,  $Z \div z(t, x) = Q(t)x + q(t)$ . Затем находится решение  $x(t), t \in [t_0, 1]$  уравнения

$$\dot{x} = x + u(t, x) + z(t, x) = [1 + P(t) + Q(t)]x + [p(t) + q(t)], x(t_0) = x_0, \quad (7)$$

и с помощью найденного  $x(t)$  формируются реализации  $u[t] = P(t)x(t) + p(t)$  выбранной ЛПР стратегии и  $z[t] = Q(t)x(t) + q(t)$  - появившейся в системе независимо от его действий неопределенности. Наконец, на всех возможных тройках  $(x(t), u[t], z[t] | t \in [0, 1])$  определены два критерия, характеризующие качество функционирования управляемой системы  $\Sigma$ :

$$J_1(U, Z, t_0, x_0) = -x^2(1) + \int_{t_0}^1 \{-2u^2[t] + z^2[t] + 2u[t]z[t]\} dt, \\ J_2(U, Z, t_0, x_0) = -x^2(1) + \int_{t_0}^1 \{-u^2[t] + 2z^2[t] + 2u[t]x(t)\} dt. \quad (8)$$

На "содержательном уровне" задачей ЛПР является выбор такой стратегии  $U \in \mathcal{U}$ , при которой оба критерия принимали бы возможно большие значения, а их функции риска (определены ниже) - возможно меньшие. При этом ЛПР вынужден учитывать возможность реализации любой неопределенности  $Z \in \mathcal{Z}$ .

Процедура принятия решения в задаче (1), где  $\mathcal{U}$  заменено на  $\mathcal{U}_z$ , а  $\mathcal{Z}$  - на  $\mathcal{Z}_t$ , происходит аналогичным образом. Отличие лишь в том, что ЛПР выбирает конкретную контрстратегию  $U_z \in \mathcal{U}_z$ , одновременно реализуется программная неопределенность  $(Z_t \div z[t], u(t, x(t), z[t]) = P(t)x + p(t))$  и тогда система (7) преобразуется в

$$\dot{x} = x + u(t, x, z[t]) + z[t] = [1 + P(t)]x + p(t) + z[t], \quad x(t_0) = x_0. \quad (9)$$

С помощью решения  $x(t), t \in [t_0, 1]$ , уравнения (9) формируются реализации  $u[t] = u(t, x(t), z[t]) = P(t)x(t) + p(t)$  и на всевозможных тройках  $(x(t), u[t], z[t] | t \in [t_0, 1])$  заданы функционалы (8).

**2. Построение функции риска.** Для каждого  $i = 1, 2$  рассмотрим вспомогательную однокритериальную динамическую линейно-квадратичную задачу при неопределенности:

$$\langle \Sigma, \mathcal{U}_z, \mathcal{Z}_t, J_i(U_z, Z_t, t_0, x_0) \rangle, \quad (10)$$

где  $\Sigma$  та же, что и в (1), множества  $\mathcal{U}_z$  и  $\mathcal{Z}_t$  - определены в (6) и (5) соответственно, критерии  $J_i(U_z, Z_t, t_0, x_0)$ ,  $(i = 1, 2)$  заданы в (8).

При построении функций риска прежде всего необходимо решить следующую вспомогательную оптимизационную задачу:

найти контрстратегию  $U_z^{(i)} \in \mathcal{U}_z$ , удовлетворяющую условию,

$$\max_{U \in \mathcal{U}} J_i(U_z, Z_t, t_0, x_0) = J_i(U_z^{(i)}, Z_t, t_0, x_0) = J_i[Z_t, t_0, x_0] \quad (11)$$

при ограничениях (2), любых  $Z_t \in \mathcal{Z}_T$  и всех начальных позициях  $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^1$ .

Затем, следуя идеям принципа минимаксного сожаления Севиджа [4], функция риска  $\Phi_i(U, Z, t_0, x_0)$  по  $i$ -му критерию  $J_i$  определяется следующим равенством:

$$\Phi_i(U, Z, t_0, x_0) = J_i[Z, t_0, x_0] - J_i(U, Z, t_0, x_0) \quad (12)$$

Она численно оценивает риск (сожаление) ЛПП в том, что при реализации неопределенности  $Z_t \in \mathcal{Z}_t$  он (исходя из наличия не одного, а двух различных критериев) выбирает и использует стратегию  $U$ , а не "самую хорошую для него" контрстратегию  $U_z^{(i)}$ , удовлетворяющую условию (11).

При нахождении  $U_z^{(i)}$  из (11) применяется метод динамического программирования в следующей формулировке.

Введем функции

$$\begin{aligned} W_1(t, x, u, z, V_1) &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x}(x + u + z) + \frac{\partial V_1}{\partial z}[-z + \cos(t)] - 2u^2 + z^2 + 2uz, \\ W_2(t, x, u, z, V_2) &= \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial x}(x + u + z) + \frac{\partial V_2}{\partial z}[-z + \cos(t)] - u^2 + 2z^2 + 2ux. \end{aligned} \quad (13)$$

**Утверждение 1.** Пусть для каждого  $i = 1, 2$  удалось найти

a) функцию  $u^{(i)}(t, x, z, V_i)$ ,

b) непрерывно дифференцируемую функцию  $V_i(t, x, z)$ ,

такие, что

1<sup>0</sup>) при всех  $(x, z) \in \mathbb{R}^2$

$$V_i(1, x, z) = -x^2; \quad (14)$$

2<sup>0</sup>) для любых  $(t, x, z, V_i) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^3$

$$\max_u W_i(t, x, u, z, V_i) = W_i(t, x, u^{(i)}(t, x, z, V_i), z, V_i); \quad (15)$$

3<sup>0</sup>) При каждой  $(t, x, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$

$$W_i(t, x, u^{(i)}(t, x, z, V_i(t, x, z)), z, V_i(t, x, z)) = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

4<sup>0</sup>) функция  $u^{(i)}(t, x, z, V_i(t, x, z)) = u^{(i)}[t, x, z]$  такова, что контрстратегия  $U_z^{(i)} \div u^{(i)}[t, x, z]$  принадлежит  $\mathcal{U}_z$ .

Тогда контрстратегия  $U_z^{(i)}$  удовлетворяет первому равенству из (11) при ограничениях (2) и любых  $Z_t \in \mathcal{Z}_t$ ,  $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times R$ .

С помощью этих достаточных условий найдем явный вид контрстратегии  $U_z^{(i)}$ . С учетом (13), достаточные условия существования  $u^{(i)}(t, x, z, V_i)$  в (15) примут вид:

$$\frac{\partial W_i}{\partial u} \Big|_{u^{(i)}(t, x, z, V_i)} = 0; \quad \frac{\partial^2 W_i}{\partial u^2} \Big|_{u^{(i)}(t, x, z, V_i)} < 0 \quad (i = 1, 2). \quad (17)$$

Неравенства из (17) имеют место, а из равенств получаем

$$u^{(1)}(t, x, z, V_1) = \frac{1}{4} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{2} z; \quad u^{(2)}(t, x, z, V_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial V_2}{\partial x} + x. \quad (18)$$

Ищем теперь решение  $V_i(t, x, z)$  уравнения в частных производных (16) с граничным условием (14) в виде

$$V_i(t, x, z) = \Theta_i(t)x^2 + 2\Xi_i(t)xz + \mathcal{X}_i(t)z^2 + \xi_i(t)x + 2\eta_i(t)z + \omega_i(t) \quad (i = 1, 2). \quad (19)$$

Подставляя (19), (18) в (16), (14) и приравнивая коэффициенты при  $x^2, z^2, xz, x, z$  и свободные члены, получаем, что (16), (14) имеют место, если  $\Theta_i(t), \Xi_i(t), \mathcal{X}_i(t), \xi_i(t), 2\eta_i(t), \omega_i(t)$  являются решениями двух систем дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1 + 2\Theta_1 + \frac{1}{2}\Theta_1^2 = 0, & \Theta_1(1) = -1; \\ \dot{\Xi}_1 + \frac{1}{2}\Theta_1\Xi_1 + \frac{3}{2}\Theta_1 = 0, & \Xi_1(1) = 0; \\ \dot{\mathcal{X}}_1 - 2\mathcal{X}_1 + 2\Xi_1 + \frac{1}{2}(\Xi_1 + 1)^2 + 1 = 0, & \mathcal{X}_1(1) = 0; \\ \dot{\xi}_1 + (1 + \frac{1}{2}\Theta_1)\xi_1 + \Xi_1 \cos t = 0, & \xi_1(1) = 0; \\ \dot{\eta}_1 - \eta_1 + \mathcal{X}_1 \cos t + \frac{1}{2}(\Xi_1 + 3)\xi_1 = 0, & \eta_1(1) = 0; \\ \dot{\omega}_1 - \eta_1 \cos t + \frac{1}{2}\xi_1^2 = 0, & \omega_1(1) = 0; \end{cases} \quad (20)$$

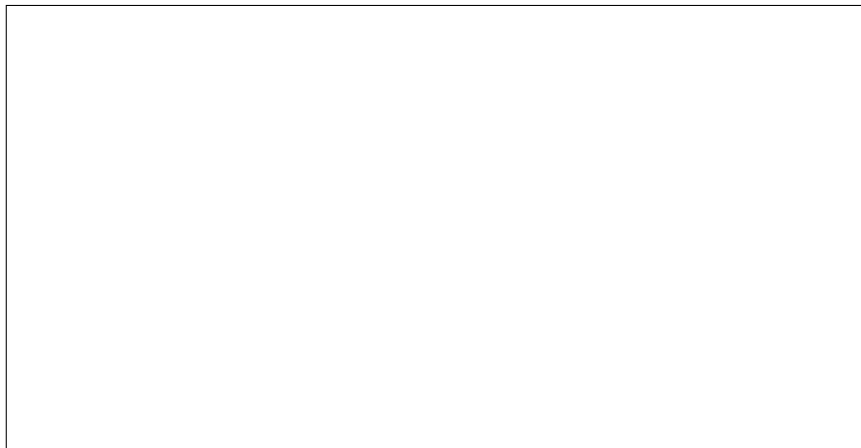
$$\begin{cases} \dot{\Theta}_2 + 2\Theta_2 + (\Theta_2 + 1)^2 = 0, & \Theta_2(1) = -1; \\ \dot{\Xi}_2 + (1 + \Theta_2)\Xi_2 + \Theta_2 = 0, & \Xi_2(1) = 0; \\ \dot{\mathcal{X}}_2 - 2\mathcal{X}_2 + 2\Xi_2 + \Xi_2^2 + 2 = 0, & \mathcal{X}_2(1) = 0; \\ \dot{\xi}_2 + (2 + \Theta_2)\xi_2 + \Xi_2 \cos t = 0, & \xi_2(1) = 0; \\ \dot{\eta}_2 - \eta_2 + \mathcal{X}_2 \cos t + (\Xi_2 + 1)\xi_2 = 0, & \eta_2(1) = 0; \\ \dot{\omega}_2 - 2\eta_2 \cos t + \xi_2^2 = 0, & \omega_2(1) = 0; \end{cases} \quad (21)$$

Первые уравнения в приведенных выше системах (20) и (21) представляют собой дифференциальные уравнения типа Риккати. Найдя их решения  $\Theta_i(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  и подставив  $\Theta_i = \Theta_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ), во второе и четвертое уравнение этих систем, приходим к линейным неоднородным уравнениям с непрерывными коэффициентами относительно  $\Xi_i$ ,  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ). Решения  $\Xi_i(t)$ ,  $\xi_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) таких систем существуют, единственны, непрерывны и продолжимы на интервал  $[t_0, 1]$  [8, с.29]. Подставляя решения  $\Theta_i(t)$ ,  $\Xi_i(t)$ ,  $\xi_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) в (19), (18), получаем контрстратегии

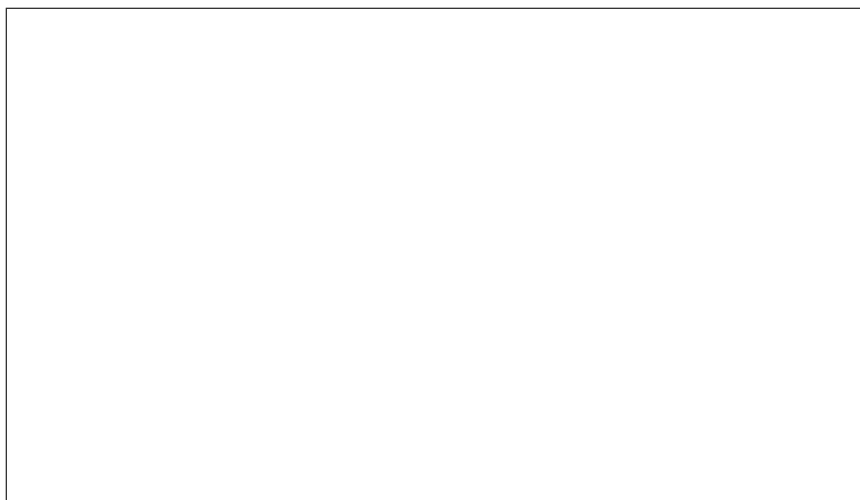
$$U_z^{(1)} \div u^{(1)}[t, x, z] = u^{(1)}(t, x, z, V_1(t, x, z)) = \frac{1}{2}[\Theta_1(t)x + (\Xi_1(t) + 1)z + \xi_1(t)], \quad (22)$$

$$U_z^{(2)} \div u^{(2)}[t, x, z] = u^{(2)}(t, x, z, V_2(t, x, z)) = [\Theta_2(t) + 1]x + \Xi_2(t)z + \xi_2(t). \quad (23)$$

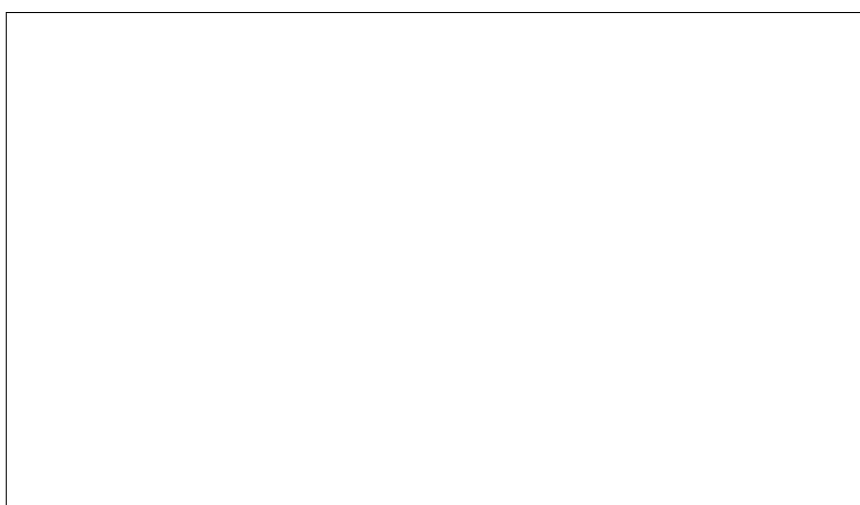
Очевидно включение  $U_z^{(i)} \in \mathcal{U}_z$ , ( $i = 1, 2$ ). По утверждению 1 определенные в (22) и (23) контрстратегии решают задачу (11). Далее рассмотрим зависимости основных параметров данной системы от времени  $t \in [0, 1]$  и от начального значения  $z[t_0] = z_0 \in [-1, 1]$ , считая при этом  $x(t_0) = 0$ ,  $t_0 = 0$ .



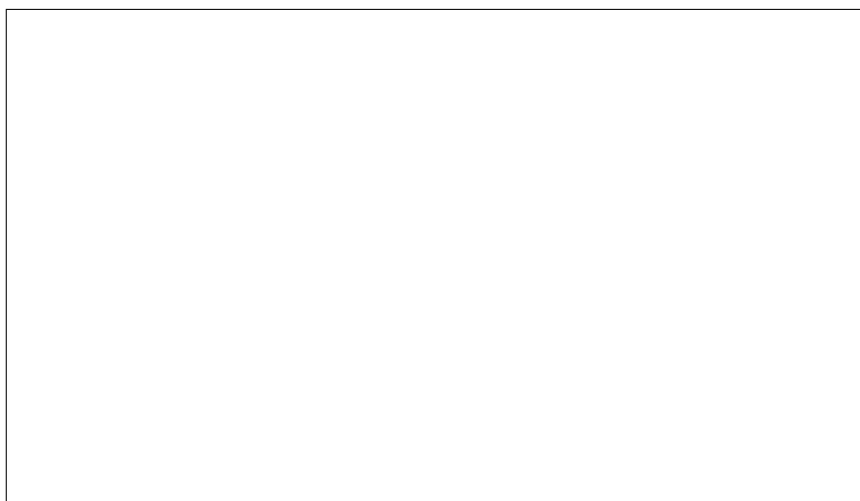
**Рис. 1.** График зависимости решения  $z(t, z_0)$  уравнения  $\dot{z} = -z + \cos t$  от  $t$  и  $z_0$ , где  $0 \leq t \leq 1$ ;  $-1 \leq z_0 \leq +1$ .



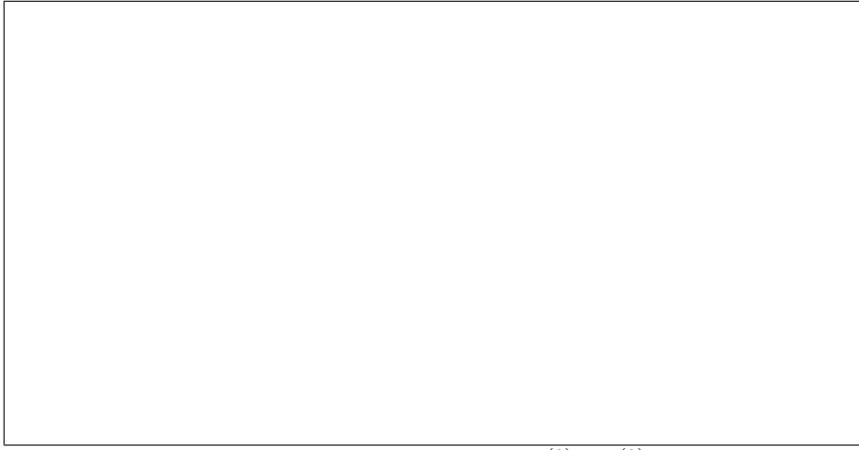
**Рис. 2.** График зависимости решения  $x^{(1)}(t, z_0)$  уравнения  $\dot{x} = x + u^{(1)}[t, x, z[t]] + z[t] = [1 + \frac{1}{2}\Theta_1(t)]x + \frac{1}{2}[3 + \Xi_1(t)]z[t] + \frac{1}{2}\xi_1(t)$ ,  $x^{(1)}(0, z_0) = 0$  от  $t$  и  $z_0$ , здесь  $z[t] = z(t, z_0)$  взято из рис. 1.



**Рис. 3.** График зависимости решения  $x^{(2)}(t, z_0)$  уравнения  $\dot{x} = x + u^{(2)}[t, x, z[t]] + z[t] = [2 + \Theta_2(t)]x + [1 + \Xi_2(t)]z[t] + \xi_2(t)$ ,  $x^{(2)}(0, z_0) = 0$ , от  $t$  и  $z_0$ , здесь  $z[t] = z(t, z_0)$  взято из рис. 1.



**Рис. 4.** График зависимости реализации контрстратегии  $u^{(1)}[t, x^{(1)}(t, z_0), z[t, z_0]] = u^{(1)}(t, z_0)$  из (22) от  $t$  и  $z_0$ , здесь  $z(t, z_0)$  взято из рис. 1, а  $x^{(1)}(t, z_0)$  - из рис. 2.



**Рис. 5.** График зависимости реализации контрстратегии  $u^{(2)}[t, x^{(2)}(t, z_0), z[t, z_0]] = u^{(2)}(t, z_0)$  из (23) от  $t$  и  $z_0$ , здесь  $z(t, z_0)$  взято из рис. 1, а  $x^{(2)}(t, z_0)$  - из рис. 3.

С помощью построенных в (22), (23) контрстратегий  $U_z^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) найдем, согласно (12), (11) и (8), функции риска по каждому критерию, где  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(U, Z, t_0, x_0) &= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2} \Theta_1^2(t) x^2(t) - \Theta_1(t) \Xi_1(t) x(t) z(t) + \frac{1}{2} [1 - \Xi_1(t)^2] * \right. \\ &\quad \left. * z^2[t] - \Theta_1(t) \xi_1(t) x(t) - \Xi_1(t) \xi_1(t) z[t] - \frac{1}{2} \xi_1^2(t) + 2u^2[t] - 2u[t]z[t] \right\} dt, \\ \Phi_2(U, Z, t_0, x_0) &= \int_0^1 \left\{ [1 - \Theta_2^2(t)] x^2(t) - 2\Theta_2(t) \Xi_2(t) x(t) z(t) - \Xi_2(t)^2 z^2[t] - \right. \\ &\quad \left. - 2\Theta_2(t) \xi_2(t) x(t) - 2\Xi_2(t) \xi_2(t) z[t] - \xi_2^2(t) + u^2[t] - u[t]x(t) \right\} dt \quad (24) \end{aligned}$$

**3. Формализация гарантированного решения задачи.** Для определения гарантированного по исходам и рискам решения задачи (1) введем вспомогательную 4-х критериальную динамическую задачу, добавив к имеющимся в (1) двум критериям еще два - функции риска (24) со знаками "минус":

$$\langle \Sigma, \mathcal{U}, \mathcal{Z}, \{J_i(U, Z, t_0, x_0), -\Phi_i(U, Z, t_0, x_0)\} \rangle = \langle \Sigma, \mathcal{U}, \mathcal{Z}, \{I_j(U, Z, t_0, x_0)\}_{j=1, \dots, 4} \rangle, \quad (25)$$

где  $\langle \Sigma, \mathcal{U}, \mathcal{Z} \rangle$  те же, что в задаче (1), а  $\Phi$  определено в (24); в (25) обозначено  $I_i = J_i, I_{2+i} = -\Phi_i$   $i = (1, 2)$ .

**Определение.** Набор  $(U^*, J_1^*, J_2^*, \Phi_1^*, \Phi_2^*) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^4$  назовем гарантированным по исходам и рискам решением задачи (1), если существует неопределенность  $Z^* \in \mathcal{Z}$  такая, что для  $J_i^*$  и  $\Phi_i^*$  выполнены равенства

$$J_i^* = J_i(U^*, Z^*, 0, 0), \quad \Phi_i^* = \Phi_i(U^*, Z^*, 0, 0) \quad (i = 1, 2), \quad (26)$$

а также, при любых  $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$

1) для всех  $U \in \mathcal{U}$  несовместна система неравенств

$$I_j(U, Z^*, t_0, x_0) \geq I_j(U^*, Z^*, t_0, x_0) \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (27)$$

из которых, по крайней мере, одно строгое;

2) при каждом  $Z \in \mathcal{Z}$  несовместна система неравенств

$$I_j(U^*, Z, t_0, x_0) \leq I_j(U^*, Z^*, t_0, x_0), \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (28)$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

Тогда  $(J_1^*, J_2^*)$  назовем гарантированным векторным исходом,  $(\Phi_1^*, \Phi_2^*)$  - гарантированным



векторным риском задачи (1) с начальной позицией  $(t_0, x_0)$ , а пару  $(U^*, Z^*)$  седловой точкой по Парето задачи (25).

**Замечание 1.** Выполнение требования 1) из определения в п.3 означает, что стратегия  $U^*$  максимальна по Парето в задаче (25), где фиксированна неопределенность  $Z = Z^*$ , а условие 2) - минимальность по Парето неопределенности  $Z^*$  в задаче (25), где "замороженна" уже стратегия  $U = U^*$ .

**Замечание 2.** Если ЛПР использует в (25) стратегию  $U^*$  (из определения в п.3), то, согласно требованию 1), при любой неопределенности  $Z \in \mathcal{Z}$  полученные исходы  $I_j(U^*, Z, 0, 0)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) не могут стать меньше векторной гарантии  $(J_1^*, J_2^*, -\Phi_1^*, -\Phi_2^*)$  одновременно по всем компонентам. В этом "гарантирующий смысл" введенного решения.

**Замечание 3.** Так как для множеств  $\mathcal{Z}_t$  и  $\mathcal{Z}$ , определенных соответственно в (5) и (3), справедливо включение  $\mathcal{Z}_t \subset \mathcal{Z}$ , то из несовместности (28) получаем: при любых  $Z_t \in \mathcal{Z}_t$  несовместна система неравенств

$$J_i(U^*, Z_t, 0, 0) \leq J_i^*, \quad \Phi_i(U^*, Z_t, 0, 0) \geq \Phi_i^* \quad (i = 1, 2), \quad (29)$$

из которых, по крайней мере, одно строгое. Таким образом, для построения гарантированных векторных исхода и риска достаточно найти седловую точку по Парето  $(U^*, Z^*)$  задачи (25) и определить указанные векторные гарантии по формулам (26).

**4. Нахождение седловой точки по Парето.** При построении седловой точки по Парето задачи (25) воспользуемся следующим утверждением.

**Лемма.** Если существуют числа  $\alpha_j > 0$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) и пара  $(U^*, Z^*) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Z}$  такая, что

$$\max_{U \in \mathcal{U}} \sum_{j=1}^4 \alpha_j I_j(U, Z^*, t_0, x_0) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j I_j(U^*, Z^*, t_0, x_0) = \max_{Z \in \mathcal{Z}} \sum_{j=1}^4 \alpha_j I_j(U^*, Z, t_0, x_0) \quad (30)$$

при ограничениях (2) и любых  $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ , то  $(U^*, Z^*)$  будет седловой точкой по Парето задачи (25).

Доказательство непосредственно следует из [6, с.71].

**Замечание 4.** Согласно лемме нахождение седловой точки по Парето задачи (25) сводится к построению седловой точки  $(U^*, Z^*)$  функционала  $\sum_{j=1}^4 \alpha_j I_j(U, Z, t_0, x_0)$  (выполнению цепочки равенств (30)).

Положив в линейной свертке, фигурирующей в (30), числа  $\alpha_j = \frac{1}{4}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), найдем функционал

$$\begin{aligned} I(U, Z, t_0, x_0) &= \sum_{j=1}^4 \alpha_j I_j(U, Z, t_0, x_0) = \sum_{i=1}^2 (\alpha_i J_i(U, Z, t_0, x_0) - \alpha_{i+2} \Phi_i(U, Z, t_0, x_0)) = \\ &= Cx^2(1) + \int_{t_0}^1 \{ Du^2[t] + 2Ku[t]z[t] + 2Nu[t]x[t] + G(t)x^2(t) + 2M(t)z[t]x(t) + \\ &\quad + L(t)z^2(t) + 2g(t)x(t) + 2l(t)z[t] + r(t) \} dt, \quad (31) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{2}, \quad D = -\frac{3}{2}, \quad K = \frac{1}{2}, \quad N = \frac{1}{2}, \quad G(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\Theta_1^2(t) + \frac{1}{4}\Theta_2^2(t), \\ M(t) &= \frac{1}{8}\Xi_1(t)\Theta_1(t) + \frac{1}{4}\Xi_2(t)\Theta_2(t), \quad L(t) = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\Xi_1^2(t) + \frac{1}{4}\Xi_2^2(t), \\ g(t) &= \frac{1}{8}\xi_1(t)\Theta_1(t) + \frac{1}{4}\Theta_2(t)\xi_2(t), \quad l(t) = \frac{1}{8}\Xi_1(t)\xi_1(t) + \frac{1}{4}\Xi_2(t)\xi_2(t), \\ r(t) &= \frac{1}{8}\xi_1^2(t) + \frac{1}{4}\xi_2^2(t), \quad (32) \end{aligned}$$

а  $\Theta_i(t)$ ,  $\Xi_i(t)$ ,  $\xi_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) подставлены из (20), (21).

Для построения седловой точки воспользуемся следующим вариантом метода динамического программирования.

Именно, используя обозначения (32), введем функцию

$$W(t, x, u, z, V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(x + u + z) + u[Du + 2Kz + 2Nx] + z[L(t)z + 2M(t)x + 2l(t)] + x[G(t)x + 2g(t)] + r(t). \quad (33)$$

**Утверждение 2.** Пусть существуют

а) функции  $u(t, x, V)$ ,  $z(t, x, V)$ ,

б) непрерывно дифференцируемая функция  $V(t, x)$

такие, что

1<sup>0</sup>) при всех  $x \in \mathbb{R}$

$$V(1, x) = Cx^2; \quad (34)$$

2<sup>0</sup>) для любых  $(t, x, V) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$

$$\max_u W(t, x, u, z(t, x, V), V) = W(t, x, u(t, x, V), z(t, x, V), V) = \min_z W(t, x, u(t, x, V), z, V); \quad (35)$$

3<sup>0</sup>) При каждом  $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$

$$W_i(t, x, u(t, x, V(t, x)), z(t, x, V(t, x)), V(t, x)) = 0; \quad (36)$$

4<sup>0</sup>) функции  $u^*(t, x) = u(t, x, V(t, x))$ ,  $z^*(t, x) = z(t, x, V(t, x))$  таковы, что для  $U^* \div u^*(t, x)$ ,  $Z^* \div z^*(t, x)$  выполняются включения  $U^* \in \mathcal{U}$ ,  $Z^* \in \mathcal{Z}$ .

Тогда пара  $(U^*, Z^*)$  является седловой точкой по Парето в задаче (25).

Еще раз упомянем, что справедливость утверждения 2 установлена в [1, с. 115-116].

Применим это утверждение. Требования (35) имеют место, если

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} \Big|_{u(t,x,V),z(t,x,V)} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{u(t,x,V),z(t,x,V)} = 0; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \Big|_{u(t,x,V),z(t,x,V)} = 2D = -3 < 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \Big|_{u(t,x,V),z(t,x,V)} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\Xi_1^2(t) + \frac{1}{4}\Xi_2^2(t) > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Из равенств (37) получаем систему двух алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно  $u(t, x, V)$ ,  $z(t, x, V)$ , решая которую находим

$$\begin{aligned} z(t, x, V) &= -\frac{(16\frac{\partial V}{\partial x} + [3\Xi_1(t)\Theta_1(t) + 6\Xi_2(t)\Theta_2(t) + 4]x}{19 + 3\Xi_1^2(t) + 6\Xi_2^2(t)} - \frac{[3\Xi_1(t)\xi_1(t) + 6\Xi_2(t)\xi_2(t)]}{19 + 3\Xi_1^2(t) + 6\Xi_2^2(t)}, \\ u(t, x, V) &= -\frac{-\frac{\partial V}{\partial x}[1 + \Xi_1^2(t) + 2\Xi_2^2(t)]}{19 + 3\Xi_1^2(t) + 6\Xi_2^2(t)} - \\ &\quad - \frac{[\Xi_1(t)\Theta_1(t) + 2\Xi_2(t)\Theta_2(t) - \Xi_1^2(t) - 2\Xi_2^2(t) - 5]x}{19 + 3\Xi_1^2(t) + 6\Xi_2^2(t)} - \\ &\quad - \frac{\Xi_1(t)\xi_1(t) + 2\Xi_2(t)\xi_2(t)}{19 + 3\Xi_1^2(t) + 6\Xi_2^2(t)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя (38) в (36), получаем для нахождения  $V(t, x)$  уравнение с частными производными, решение которого ищем в виде  $V(t, x) = H(t)x^2 + 2\eta(t)x + \xi(t)$ ; из (34) следует граничное условие  $V(1, x) = -\frac{1}{2}x^2$ . Затем приравниваем в полученных тождествах (по  $x$ ) коэффициенты при  $x^2, x, x^0$ . Тогда приходим к системе из 3-х дифференциальных уравнений относительно  $H(t), \eta(t), \xi(t)$  с начальными условиями  $H(1) = -\frac{1}{2}, \eta(1) = \xi(1) = 0$ . При этом первое из них типа Риккати. Решаем систему численно и с помощью найденных решений  $(H^*(t), \eta^*(t), \xi^*(t)|t \in [0, 1])$  строим, во-первых, функцию

$$V(t, x) = H^*(t)x^2 + 2\eta^*(t)x + \xi^*(t),$$

во-вторых, ее частную производную

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 2[H^*(t)x + \eta^*(t)], \tag{39}$$

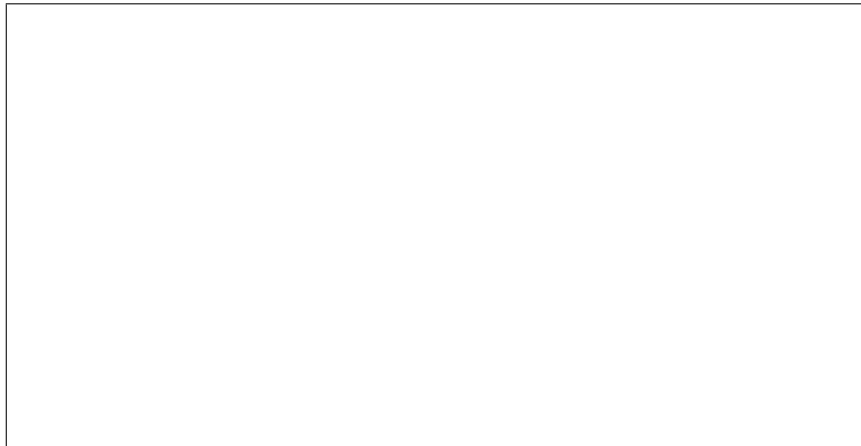
в-третьих, используя (38) и (39), функции

$$u^*(t, x) = u(t, x, V(t, x)), \quad z^*(t, x) = z(t, x, V(t, x)).$$

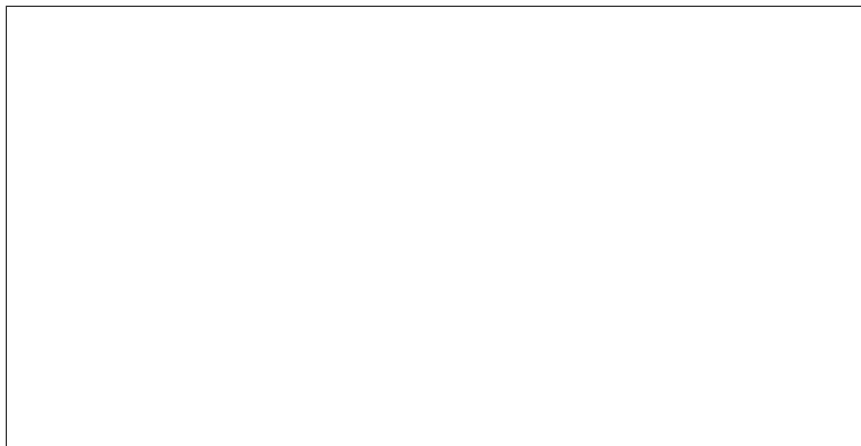
Согласно утверждению 2 пара

$$(U^*, Z^*) \div (u^*(t, x), z^*(t, x)) \tag{40}$$

будет седловой точкой по Парето задачи (25). Далее, на рисунках приведена фазовая траектория  $x^*(t)$  и реализации компонент  $u^*[t] = u^*(t, x^*(t)), z^*[t] = z^*(t, x^*(t))$  седловой точки по Парето в зависимости от времени.



**Рис. 6.** Решение  $x^*(t), t \in [0, 1]$  системы  $\dot{x} = x + u^*(t, x) + z^*(t, x), x(0) = 0$



**Рис. 7.** График  $u^*[t] = u^*(t, x^*(t))$ , где  $x^*(t)$  берется из рис. 6.



Рис. 8. График  $z^*[t] = z^*(t, x^*(t))$ , где  $x^*(t)$  берется из рис. 6.

**5. Построение гарантированных исхода и риска.** Согласно определению из п.3, гарантированное по исходам и рискам решение задачи (1) образует упорядоченная пятерка  $(U^*, J_1^*, J_2^*, \Phi_1^*, \Phi_2^*)$ . Стратегия  $U \div u^*(t, x)$  уже найдена в разделе 4. Остается по седловой точке по Парето  $(U^*, Z^*)$  определить числа  $J_i^* = J_i^*(U^*, Z^*, 0, 0)$ ,  $\Phi_i^* = \Phi_i^*(U^*, Z^*, 0, 0)$ , ( $i = 1, 2$ ). Для этого воспользуемся приемом предложенным в [7, с. 81-83]. А именно, введем функции,

$$\begin{aligned}
 W_1(t, x, u, z, V) &= \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial x}(x + u + z) + u(-2u + 2z) + z^2, \\
 W_2(t, x, u, z, V) &= \frac{\partial V_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V_2(t, x)}{\partial x}(x + u + z) + u(-u + 2x) + 2z^2, \\
 W_3(t, x, u, z, V) &= \frac{\partial V_3(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V_3(t, x)}{\partial x}(x + u + z) + u(-2u + 2z) + \\
 &+ z\left[\frac{1}{2}\Xi_1^2(t) - \frac{1}{2}\right]z + x\Xi_1(t)\Theta_1(t) + \Xi_1(t)\xi_1(t) + \frac{1}{2}\Theta_1^2(t)x^2 + \xi_1(t)\Theta_1(t)x + \frac{1}{2}\xi_1^2(t), \\
 W_4(t, x, u, z, V) &= \frac{\partial V_4(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V_4(t, x)}{\partial x}(x + u + z) + u(-u + 2x) + z[z\Xi_2^2(t) + \\
 &+ 2x\Xi_2(t)\Theta_2(t) + 2\Xi_2(t)\xi_2(t)] + [\Theta_2^2(t) - 1]x^2 + 2\Theta_2(t)\xi_2(t)x + \xi_2^2(t), \quad (41)
 \end{aligned}$$

где  $\Theta_i(t)$ ,  $\Xi_i(t)$ ,  $\xi_i(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , решения соответствующих подсистем из (20) и (21).

**Утверждение 3.** [8, с. 81-83]. Пусть удалось найти непрерывно дифференцируемые функции  $V_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) и такие, что

1<sup>0</sup>) при всех  $x \in \mathbb{R}$

$$V_i(1, x) = -x^2, \quad V_{i+2}(1, x) = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (42)$$

2<sup>0</sup>) для всяких  $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^1$

$$W_j(t, x, u^*(t, x), z^*(t, x), V_j(t, x)) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4); \quad (43)$$

Тогда при любом выборе начальной позиции  $(t^0, x^0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$  справедливы равенства

$$J_i(U^*, Z^*, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0), \quad \Phi_{i+2}(U^*, Z^*, t_0, x_0) = \Phi_{i+2}(t_0, x_0); \quad (44)$$

в (43), (44) используются функции  $u^*(t, x)$ ,  $z^*(t, x)$ , определенные в (40).

Будем теперь искать решения  $V_i(t, x)$  уравнений с частными производными (43), (41) и граничными условиями (42) в виде

$$V_j(t, x) = H_j(t)x^2 + 2\eta_j(t)x + \omega_j(t) \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (45)$$

Подставляя (45) в (43), (41) и приравнивая коэффициенты при  $x^2, x, x^0$ , получаем 4 отдельных независимых подсистемы, каждая из которых состоит из 3-х дифференциальных линейных неоднородных уравнений относительно  $H_j, \eta_j, \omega_j$  с непрерывными (по  $t$ ) коэффициентами. Во избежание громоздких выкладок здесь не приводится конкретный вид уравнений. С учетом (44) и (45) получаем

$$\begin{aligned} J_1^* &= -0.15606, \\ J_2^* &= -0.05202, \\ \Phi_1^* &= -0.01735, \\ \Phi_2^* &= -0.12588. \end{aligned}$$

Заметим, что отрицательность функций риска объясняется тем, что здесь используются множество  $\mathcal{Z}$ , а не  $\mathcal{Z}_t$ . Так как система

$$\begin{cases} \Phi_i(U^*, Z_t) > \Phi_i^* \\ J_i(U^*, Z_t) < J_i^* \end{cases}$$

несовместна, и  $\Phi_i^* < 0$ , а  $\Phi_i^*(U, Z_t) \geq 0$  и  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_z$ ,  $\mathcal{Z}_t \subset \mathcal{Z}$  (по определению), то  $\Phi_i^* > 0$  ( $i = 1, 2$ ) несовместна  $\forall Z_t$  и тогда найденное  $U^*$  обеспечит нулевую векторную гарантию по рискам всех критериев.

Приведем также зависимость исходов и рисков от коэффициентов  $\alpha_j$  линейной свертки (30).

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 0.1 & J_1^* = -0.0262, & \alpha_1 = 0.1 & J_1^* = -0.0375, \\ \alpha_2 = 0.2 & J_2^* = -0.0107, & \alpha_2 = 0.3 & J_2^* = -0.0151, \\ \alpha_3 = 0.3 & \Phi_1^* = -0.0074, & \alpha_3 = 0.2 & \Phi_1^* = -0.0050, \\ \alpha_4 = 0.4 & \Phi_2^* = -0.0119. & \alpha_4 = 0.4 & \Phi_2^* = -0.0182. \end{array} \quad (46)$$

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 0.1 & J_1^* = -0.0324, & \alpha_1 = 0.2 & J_1^* = -0.0284, \\ \alpha_2 = 0.2 & J_2^* = -0.0173, & \alpha_2 = 0.1 & J_2^* = -0.0142, \\ \alpha_3 = 0.4 & \Phi_1^* = -0.0092, & \alpha_3 = 0.3 & \Phi_1^* = -0.0088, \\ \alpha_4 = 0.3 & \Phi_2^* = -0.0156. & \alpha_4 = 0.4 & \Phi_2^* = -0.0130. \end{array} \quad (47)$$

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 0.1 & J_1^* = -0.0508, & \alpha_1 = 0.1 & J_1^* = -0.0876, \\ \alpha_2 = 0.4 & J_2^* = -0.0062, & \alpha_2 = 0.4 & J_2^* = -0.0208, \\ \alpha_3 = 0.2 & \Phi_1^* = 0.0130, & \alpha_3 = 0.3 & \Phi_1^* = -0.0073, \\ \alpha_4 = 0.3 & \Phi_2^* = -0.0229. & \alpha_4 = 0.2 & \Phi_2^* = -0.0557. \end{array} \quad (48)$$

Автор благодарит профессора В. И. Жуковского за постановку задачи и обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 02-01-00612).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский В. И., Дочев Д. Т. Векторная оптимизация динамических систем. Болгария. Русе: Центр по Математике, 1981.
2. Zhukovskiy V. I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. N. Y. etc.: Academic Press 1994.
3. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis. // Annual Math. Statist. 1939. № 10. P. 299 - 326.
4. Savage L. Y. The theory of statistical decision. //J. American Statistic Association. 1951. № 46. P. 55 - 67.
5. Колемаев В. А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 2002.
6. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.:Наука, 1982.
7. Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: МНИИПУ, 1997.
8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: ГИФМЛ, 1961.

Кафедра математической статистики  
ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
13.05.2004 г.

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХКОРОТКОГО И СВЕРХСИЛЬНОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА С ПЛАЗМОЙ

© 2005 г. А. В. Суворов

**1. Введение.** Развитие в последние годы технологии производства компактных лазеров, способных генерировать сверхкороткие импульсы в мультитерраваттном и петаваттном диапазоне мощности, позволяет в настоящее время говорить о широком круге приложений этих устройств [1]. Например, предложено использовать подобные лазеры для создания новых типов ускорителей заряженных частиц [2], источников жесткого рентгеновского и гамма-излучения [3] и инжекторов заряженных частиц [4]. Вышеупомянутые приложения основываются на том, что нелинейные взаимодействия лазерного излучения большой мощности с веществом сопровождается эффективным преобразованием энергии лазера в энергию быстрых частиц. Во многих экспериментах по взаимодействию сверхкоротких лазерных импульсов с газообразными и твердыми мишенями наблюдалась генерация хорошо коллимированных ионных пучков большой энергии. Для детального компьютерного моделирования этих процессов необходимо использовать современные двумерные и трехмерные методы частиц PIC (particle-in-cell) методы.

В настоящей статье рассматривается взаимодействие лазерного импульса с многослойными газообразными мишенями. В первой главе статьи кратко описывается используемый метод частиц, во второй главе рассматривается математическая постановка задачи, в последней демонстрируются наиболее интересные результаты компьютерного эксперимента.

**2. Модель частица-сетка. Описание PIC метода.** Метод макрочастиц (ниже именуемый просто метод частиц) является методом численного решения уравнений Власова - Максвелла. В последнее время различные модификации этого метода получают все большее распространение. Данный метод применим как в одномерных, так и в многомерных задачах с учетом, если необходимо, всех компонент самосогласованного электромагнитного поля и релятивистских эффектов, а также удобства его сочетания с другими (например, гидродинамическими) подходами.

В зависимости от требуемой точности расчетов и затраченных вычислительных ресурсов различают несколько моделей частиц:

- 1) модель частица - частица (PP). В этом случае взаимодействие частиц описывается через силу дальнего действия;
- 2) модель частица - сетка (PM). Сила рассматривается как полевая величина и аппроксимируется на сетке;
- 3) модель частица-частица - частица-сетка (P<sup>3</sup>M). Является гибридом моделей PP и PM.

Идея рассматриваемого метода частиц (PM) состоит в следующем. Фазовое пространство  $(\vec{r}, \vec{v})$  для электронной и ионной компоненты плазмы в начальный момент времени  $t = 0$  разбивается на непересекающиеся ячейки, а суммарные заряды и массы всех частиц в каждой такой ячейке приписывается одной модельной макрочастице. Для простоты в качестве компоненты фазового пространства мы рассматриваем скорость, а не импульс. Численно решая уравнения Власова (для ионной и электронной функции распределения)

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2)$$

по характеристикам, можно, шаг за шагом по времени, проследить динамические траектории всех частиц в фазовом пространстве, параллельно пересчитывая с их помощью электрическое и магнитное поля на каждом шаге. Алгоритмически это выглядит так: по фазовым координатам частиц восстанавливаются плотности заряда и тока, далее решаются уравнения Максвелла

с определенными таким образом правыми частями, после чего находятся приращения фазовых координат (пространственных координат и импульсов) частиц за временной шаг в полученном поле. Описанная процедура повторяется требуемое число раз. Таким путем удастся воссоздать самосогласованное развитие во времени пространственной картины электромагнитного поля, с одной стороны, и собственных зарядов и токов плазмы, с другой.

Решающим фактором резкого повышения эффективности дискретной модели стал, вслед за введением пространственных сеток, переход от точечных макрочастиц к частицами конечных размеров - так называемым заряженным облакам. Связанное с этим искажение закона межчастичного взаимодействия существенно сказывалось лишь на длинах волн порядка диаметра облака (масштаба "размазывания" заряда). В то же время эффективная частота столкновения облаков оказалась намного меньше частоты кулоновских столкновений, что при том же числе частиц резко увеличило "бесстолкновительность" новых моделей.

**3. Постановка задачи.** При решении задачи методом частиц с использованием любой его модификации мы сталкиваемся с необходимостью ответить на следующие три вопроса:

1) об оптимальном выборе начальных фазовых координат макрочастиц;  
 2) о способах восстановления на каждом временном шаге зарядовых и токовых плотностей, входящих в уравнения Максвелла для самосогласованных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , по фазовым координатам частиц.

3) об уравнениях движения макрочастиц с учетом дискретности системы. Реализация численного алгоритма представлена на рис.1.

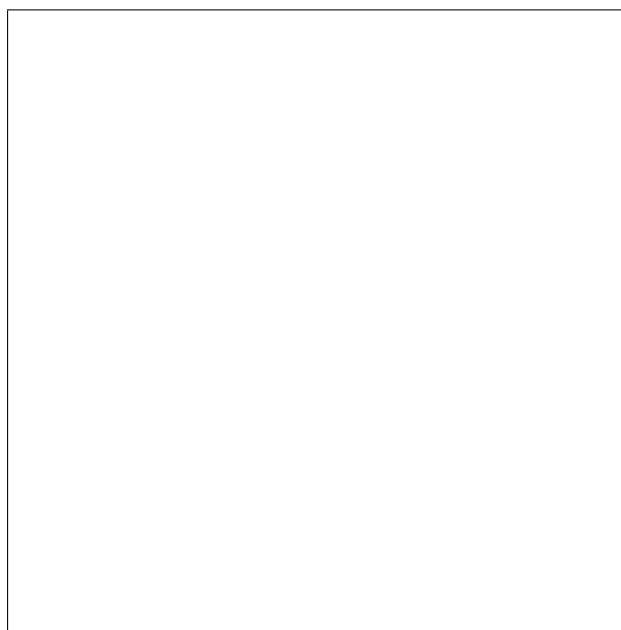


Рис. 1. Схема PIC алгоритма.

Рассмотрим детально каждый из выше перечисленных вопросов.

**3.1. Формирование начального состояния.** Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим задание частиц одного сорта. Пусть полное количество макрочастиц в расчетной области  $\mathbf{S}$  пространства равно  $\mathbf{N}$ .

Требуется задать заряды  $e_j$ , а также начальные координаты  $\vec{r}_j(0)$  и скорости  $\vec{v}_j(0)$ ,  $j = \overline{1, N}$  в соответствии с непрерывной функцией распределения  $F(\vec{r}, \vec{v}) = f(\vec{r}, \vec{v}, 0)$ , отвечающей некоторому исходному состоянию плазмы. В зависимости от способа определения параметров  $e_j$ ,  $\vec{r}_j(0)$ ,  $\vec{v}_j(0)$  выделяют следующие виды стартов: хаотический, спокойный, регулярный, тепловой. В нашем случае используется последний вид старта. Его суть заключается в том, что все пространство делится на непересекающиеся ячейки, и частицы одного сорта размещаются

в них с учетом требуемой плотности распределения. Координаты частиц определяются детерминированным способом. Частицы же другого сорта помещаются вслед за частицами первого с учетом дебаевского экранирования.

**3.2. Вычисление в узлах сетки  $\rho$  и  $j$ .** Рассмотрим систему из  $\mathbf{N}$  точечных частиц с координатами  $\vec{r}_j(t)$ , скоростями  $\vec{v}_j(t)$ , зарядами  $e_j$  и массами  $m_j$ , находящихся в некотором объеме  $\mathbf{S}$  пространства. Одночастичную функцию распределения такой системы можно записать в виде

$$\bar{f}_N(\vec{r}, \vec{v}, t) = \int_S f_N(\vec{r}', \vec{v}, t) G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' = \sum_j e_j G(\vec{r}, \vec{r}_j(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_j(t)). \quad (3)$$

Естественно определить плотности заряда и тока в моделях как моменты модельной функции распределения  $\bar{f}$

$$\rho(\vec{r}, t) = \int \bar{f}_N(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} = \sum_j e_j G(\vec{r}, \vec{r}_j(t)), \quad (4)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int \vec{v} \bar{f}_N(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} = \sum_j e_j \vec{v}_j(t) G(\vec{r}, \vec{r}_j(t)). \quad (5)$$

В силу линейности преобразование приводит к эффективному "размазыванию" ("взвешиванию") заряда  $j$ -той макрочастицы в окрестности соответствующей координаты  $\vec{r}_j, j = \overline{1, N}$ . Функция  $G$  при этом является как бы долей заряда (как функция распределения), поэтому в силу сохранения заряда необходимо потребовать выполнения условия нормировки

$$\int_S G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' = 1. \quad (6)$$

Поэтому нашей задачей будет определение функции  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ . Как будет видно дальше, эта функция имеет довольно сложную структуру. Рассмотрим ряд важных конкретных случаев:

а) Вырожденные ядра.

Пусть  $\{\psi_k(\vec{r})\}$  - ортонормированная система функций в  $\mathbf{S}$ . Тогда возьмем ядро преобразований в виде

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{k=1}^K \psi_k(\vec{r}) \psi_k^*(\vec{r}'), \quad (7)$$

где второй подынтегральный множитель является комплексно сопряженным. Результат интегрального преобразования некоторой функции  $f$  с таким вырожденным ядром есть конечный отрезок ряда Фурье функции  $f$  по выбранной системе  $\{\psi_k(\vec{r})\}$ . В качестве примера разберем систему финитных функций следующего вида:

$$\psi_k(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \notin s_k \\ \frac{1}{\sqrt{|s_k|}}, & \vec{r} \in s_k, \end{cases} \quad (8)$$

где  $|s_k|$  - мера множества, а  $s_k$  - непересекающиеся части  $\mathbf{S}$ .

В одномерном случае эта функция выглядит особенно просто

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} H\left(\frac{x - x_k}{h}\right), \quad h = S/K, \quad x_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad (9)$$



$$H_0(\xi) = U\left(\xi + \frac{1}{2}\right) - U\left(\xi - \frac{1}{2}\right), \quad (10)$$

$$U(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ \frac{1}{2}, & \xi = 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}. \quad (11)$$

Таким образом, для подсистемы, состоящей из частиц одного сорта, получаем, что плотность заряда в каждой ячейке прямо пропорциональна количеству попавших туда частиц и обратно пропорциональна объему ячейки. И мы приходим к так называемой модели "ближайшего узла" **NGP** (nearest grid point) с той лишь разницей, что в **NGP** плотность заряда находится только в центрах ячеек, а здесь она определена во всех точках области **S**.

Однако, используя такие схемы, мы должны помнить, что после решения уравнения Пуассона полученное электрическое поле необходимо интерполировать между узлами, т.е. определить его во всех точках **S**. Например, для модели **NGP** такой выбор системы функций соответствует линейной интерполяции поля, наиболее часто употребляемой на практике. Также можно использовать сплайны более высокого порядка, но тогда  $G$  будет иметь более сложную структуру. Из сказанного следует, что представление моделей в форме (3), помимо восстановления плотности заряда по координатам частиц, включает и способ интерполяции. Данный метод ослабляет столкновительные эффекты, поскольку сильно ослабляет взаимодействие частиц на расстояниях меньше размера ячейки. Однако движение частиц внутри ячейки не приводит к перераспределению частиц на отрезке, а переход частицы из одной ячейки в другую вызывает резкое локальное изменение плотности. Попытка преодолеть подобные трудности приводит к сильному искажению взаимодействия между частицами.

Теперь рассмотрим модели, в которых сглаживание взаимодействия производится с большим успехом - это модели, использующие концепцию облаков.

b) Симметричные ядра.

Пусть  $G(\vec{r}, \vec{r}') = R(\vec{r} - \vec{r}')$ , где  $R$  - интегрируемая, четная по всем аргументам функция. Каждая модельная частица представляет собой "облако", форма которого не зависит от положения частицы в пространстве. Это и есть модель "заряженных облаков". Однако на практике она почти не используется. Используется преобразование с ядрами из пунктов а) и б).

с) Модели типа "облаков в ячейках" (cloud-in-cell или CIC).

Ядра  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  в таких моделях представляют собой произведения некоторого числа уже встречавшихся функций а) и б):

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \int G_A(\vec{r}, \vec{r}'') G_B(\vec{r}', \vec{r}'') d\vec{r}'', \quad (12)$$

$$G_B = R_0(\vec{r}' - \vec{r}''), R_0(\vec{r}' - \vec{r}'') = \prod_{q=1}^Q \frac{1}{h_q} H_0\left(\frac{\vec{r}'_q - \vec{r}''_q}{h_q}\right), \quad (13)$$

$$G_A = \sum_k \psi(\vec{r}) \psi_*(\vec{r}'), \quad (14)$$

где функции  $\psi$  и  $H_0$  определены выше. Данная модель (3) с ядром (12) соответствует модели **CIC**, в которой "взвешенное распределение" заряда облака между окружающими узлами сетки реализуется следующим образом. Теперь введем последовательность вспомогательных финитных функций  $H_n(\xi)$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ), используя уже ранее заданную  $H_0$  и операцию свертки:

функция "шляпка":

$$H_0 = U\left(\xi + \frac{1}{2}\right) - U\left(\xi - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1, & |\xi| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |\xi| = \frac{1}{2} \\ 0, & |\xi| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (15)$$

функция "треугольник":

$$H_1(\xi) = \int H_0(\xi')H_0(\xi - \xi')d\xi' = H_0(\xi) * H_0(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi|, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (16)$$

функция "квадратичный колокол":

$$H_2(\xi) = H_1(\xi) * H_0(\xi) = H_0(\xi) * H_0(\xi) * H_0(\xi) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \xi^2, & |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \xi\right)^2, & \frac{1}{2} < |\xi| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & |\xi| > \frac{3}{2} \end{cases} \quad (17)$$

...

$$H_n(\xi) = H_{n-1}(\xi) * H_0(\xi) \quad (18)$$

Таким образом, подставляя (12), (16) и выражение для  $\psi_k$  в формулу вычисления плотности, имеем

$$G_{CIC}(x, x') = \int \frac{1}{h} \sum_{k=1}^K H_0\left(\frac{x - x_k}{h}\right) H_0\left(\frac{x'' - x_k}{h}\right) R_0(x' - x'') \times \\ \times dx'' = \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^K H_0\left(\frac{x - x_k}{h}\right) \int H_0\left(\frac{x'' - x_k}{h}\right) H_0\left(\frac{x' - x''}{h}\right) dx''$$

Окончательно,

$$G_{CIC}(x, x') = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^K H_0\left(\frac{x - x_k}{h}\right) H_1\left(\frac{x_k - x'}{h}\right). \quad (19)$$

Полученные результаты позволяют полностью прояснить соотношение между двумя альтернативными алгоритмами определения плотности заряда в узлах сетки. Различие между этими алгоритмами связано с возможностью двух разных интерпретаций плотности заряда, определяемой на разностной сетке, по которой движутся облака. В соответствии с первым алгоритмом плотность заряда в узле определяется как сумма вкладов зарядов всех частиц, приходящихся на эту ячейку, деленная на объем ячейки. Вклад каждой частицы вычисляется как полное количество заряда, попавшее в соответствующую ячейку, т.е. определяется интегрированием финитной функции  $R$  по пересечению ее носителя с данной ячейкой. Этот алгоритм оперирует непосредственно с функцией  $R(\vec{r} - \vec{r}_j)$ , определяющей распределение заряда внутри самого облака и потому именуемой формой облака, или **формфактором**.

**3.3. Вычисление сил и потенциалов.** Чтобы завершить принципиальное описание основных стадий типичного вычислительного алгоритма метода частиц по схеме на рис.1, продолжим рассмотрение одномерной модели СИС для плоской электростатической задачи.

На нашей схеме остается пока неопределенным содержание следующих трех блоков:

1. решение уравнения Пуассона на сетке для определения значений потенциала в узлах  $\varphi_k = \varphi(x_k)$ ;
2. дифференцирование потенциалов  $\varphi_k$  для нахождения полей  $E_k$ ;
3. интерполяции значений  $E_k$  на координату  $x_j$  макрочастицы для определения действующей на нее силы  $\vec{F}_j$ .

Для определения по дискретному полю  $\{\rho_k\}$  соответствующего поля потенциалов  $\{\varphi_k\}$  надо завершить дискретизацию уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (20)$$

задавшись каким-либо способом замены производных конечными разностями. Пусть эта процедура как-то определена и в результате численного решения Пуассона найдены значения

$$\varphi_k = \varphi(x_k) = \sum_{k'} \Phi(x_k - x_{k'}) \rho(x_{k'}) \quad (21)$$

Пусть далее определена и процедура дискретного дифференцирования  $\Phi_k$ :

$$E_k = E(x_k) = -\hat{d}\varphi(x_k), \quad (22)$$

где  $\Phi$  - некий аналог функции Грина,  $\hat{d}$  - разностный оператор дифференцирования  $\varphi$ . Теперь по известному дискретному полю  $\{E_k\}$ , аппроксимирующему непрерывную функцию  $E(x, t) = \sum_k E_k \delta\left(\frac{x-x_k}{h}\right)$ , найдем электрическое поле  $E_j$ . Для этого в рамках выбранной модели СИС, мы должны воспользоваться формулой

$$F(\vec{r}, t) = e \int E(\vec{r}, t) G(\vec{r}, \vec{r}_j) d\vec{r}_j, \quad (23)$$

подставив в нее  $E(x, t)$  и  $G_{CIC}$ , полученную ранее. Тогда

$$\begin{aligned} E_j(t) = E(x_j, t) &= \int E(x, t) G_{CIC}(x, x_j) dx = \\ &= \int \left( \sum_k E_k \delta\left(\frac{x-x_k}{h}\right) \right) \times \\ &\times \left( \sum_k H_0\left(\frac{x-x_k}{h}\right) H_1\left(\frac{x_k-x_j}{h}\right) \right) d\frac{x}{h} = \\ &= \sum_k E_k H_1\left(\frac{x_j-x_k}{h}\right) = h \sum_k E_k H_1\left(\frac{x_j-x_k}{h}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

Видно, что интерполяция  $\{E_k\}$  на  $x = x_j$  при вычислении  $E_j$  производится с помощью того же формфактора, что и при интерполяции заряда частицы в точке  $x_j$  на узел  $x_k$ . Этот важный факт подчеркивает внутреннюю самосогласованность модели СИС. Таких же результатов можно добиться и в случае моделей TSC, NGP. Мы не будем останавливаться на возможных численных методах решения уравнения Пуассона для потенциала. Лишь подчеркнем, что выбранный метод должен быть достаточно эффективным в вычислительном плане.

**3.4. Вычисление координат и скоростей.** С помощью интегральных преобразований уравнения Власова, с учетом законов сохранения мы получим следующие выражения для

производных по времени от векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$

$$\dot{\vec{v}}_j(t) = \frac{e}{m} \int E(\vec{r}, t) G(\vec{r}, \vec{r}_j) d\vec{r} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, t)}{m} \quad (25)$$

$$\dot{\vec{r}}_j(t) = \vec{v}_j(t) \quad (26)$$

Уравнения (25-26) являются уравнениями движения модельных частиц. Разностным аналогом системы (25-26) может служить любое конечно-разностное выражение, удовлетворяющая стандартным требованиям (точность, устойчивость и т.д.). Наиболее употребительным способом дискретизации (25-26) является так называемая "схема с перешагиванием" (leap-frog):

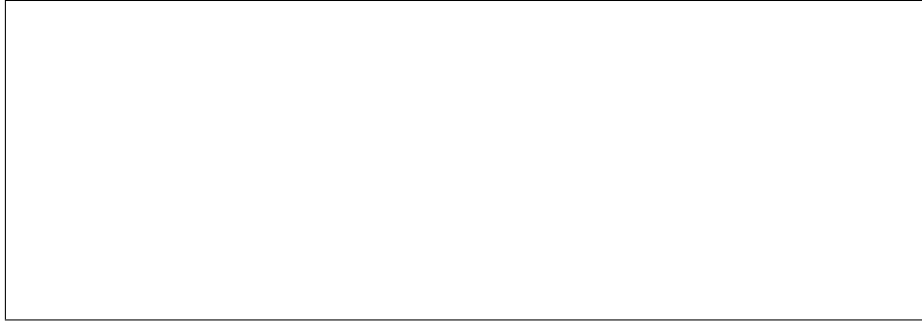
$$\frac{\vec{r}^{n+1} - \vec{r}^n}{\Delta t} = \vec{v}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

$$\frac{\vec{v}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{F(\vec{r}^n)}{m}, \quad (28)$$

где  $\Delta t$  - шаг по времени, а верхний индекс  $n$  обозначает временной уровень  $t^n = n\Delta t$ .

#### 4. Компьютерное моделирование.

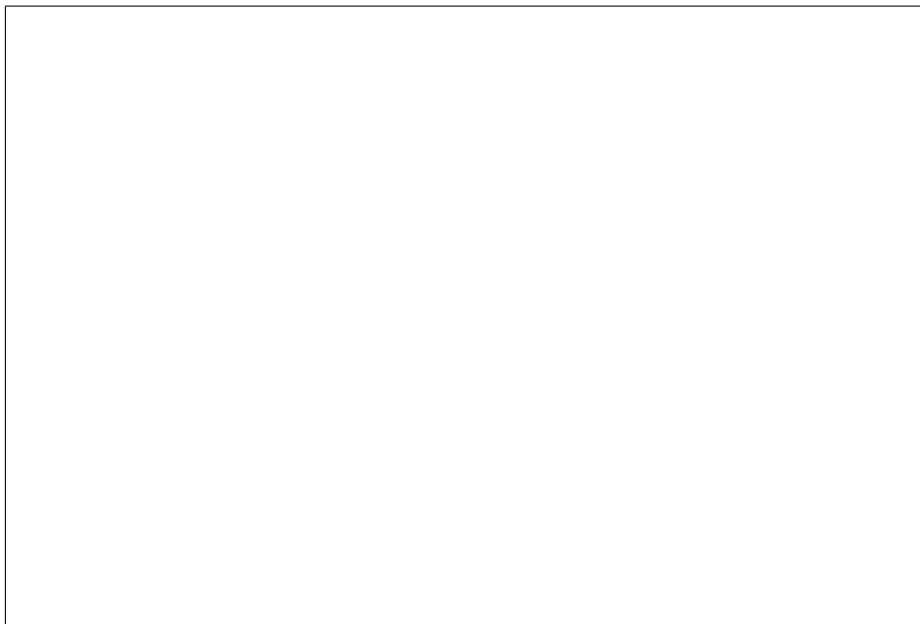
**4.1. Начальные условия.** Описание начального состояния нашей системы будем проводить в безразмерных величинах. В нашей серии вычислительных экспериментов в качестве характерного пространственного масштаба берется длина волны лазерного импульса, а в качестве характерного времени - период колебания поля в лазерном импульсе. Мы рассматриваем кусочно однородную плазму, состоящую из частиц первого и второго сорта (электронов и ионов) со стандартным отношением масс  $\frac{m_i}{m_e} = 1836$ . Среда нейтральна, т.е. количество частиц разных сортов одинаково, а соответствующие частицы разных сортов имеют одинаковые пространственные координаты. Начальные импульсы частиц нулевые. Начальные возмущения электрических и магнитных полей также считаются нулевыми. В качестве области действия мы рассматриваем вакуум с двумя плазменными слоями (рис. 2.) Размеры рассматриваемой зоны  $400\lambda_0 \times 40\lambda_0$ , где  $\lambda_0$  - длина волны. Размеры первого слоя  $60\lambda_0 \times 40\lambda_0$ , размеры второго  $160\lambda_0 \times 40\lambda_0$ . Данная постановка имеет практическое применение.



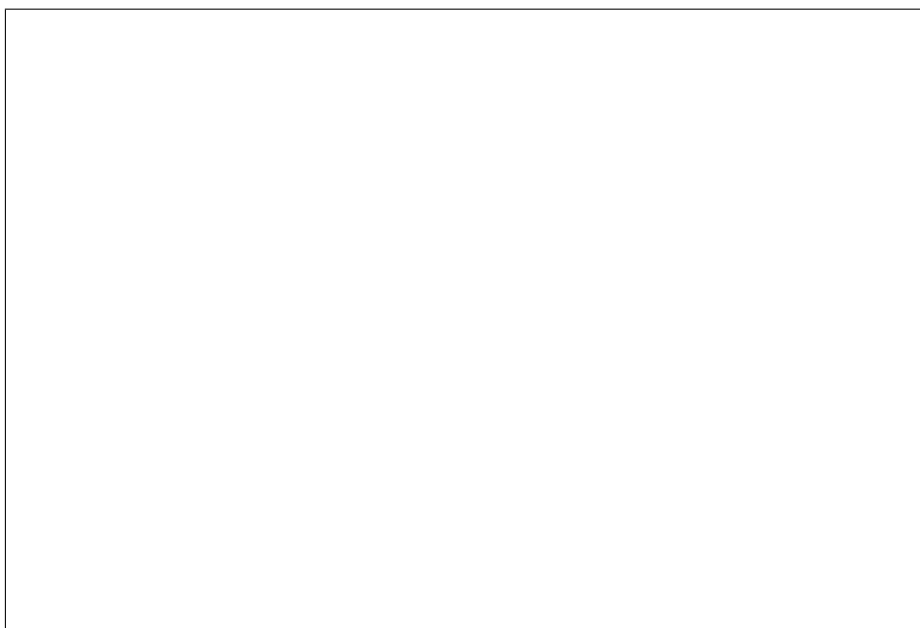
**Рис. 2.** Начальное распределение плотности электронов и ионов.

Простой пример - в качестве первого плазменного слоя может служить кожный покров, затем прослойка из мышц, а второй слой может представлять кость или непосредственно злокачественную опухоль. Вся область покрывается равномерной сеткой с шагом  $dx = dy = 0.1$  с  $PICNumber = 4$  частицами на единицу площади. Как уже отмечалось, в нашем эксперименте мы рассматриваем разреженную плазму. В качестве характеристики разреженности мы вводим величину  $\omega = \omega_0/\omega_p = 0.75$ , как отношение частоты импульса к плазменной частоте. Параметры импульса: амплитуда  $a = 1$ , длительность  $t = 40$ . Для нашего случая данная амплитуда соответствует плотности потока мощности излучения порядка  $10^{18} W/cm^2$ . Импульс имеет гауссовский профиль. Длина волны импульса принимается стандартной для подобного рода экспериментов  $\lambda_0 = 1 \mu m$ . Тогда с учетом того, что  $T_0 = \lambda_0/c, \omega_0 = 2\pi/T_0$ , имеем  $T_0 = 0.33 \cdot 10^{-14} c = 3.3$  фс. Импульс действует в течение промежутка времени  $\tau = 40T_0$ .

**4.1. Результаты вычислений.** Пройдя со скоростью света маленький участок в 20 длин волн, импульс начинает "рыть" канал в плазме ( $t = 20$ ) и распространяется дальше в направлении горизонтальной оси (рис.3а, время  $t = 82.5$ ). Первыми начинают двигаться электроны, на рисунке отчетливо видно образование кильватерных волн. Спустя  $t = 300$  устанавливается стабильный электронный канал, который существует около  $t = 600$  времен (рис.3б).



**Рис. 3а.** Распределение плотности электронов, соответствующее моменту времени  $t=82.5$ .



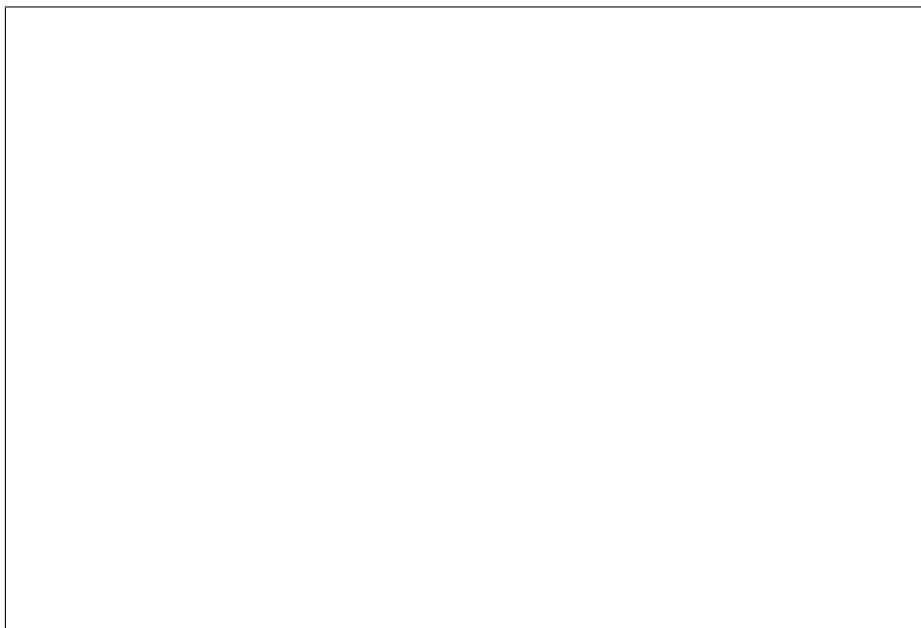
**Рис. 3б.** Распределение плотности электронов, соответствующее моменту времени  $t=382.5$ .

Данное явление объясняется дополнительной фокусировкой импульса в слое I. Здесь наблюдается эффект самофокусировки импульса за счет выдувания электронов из области.

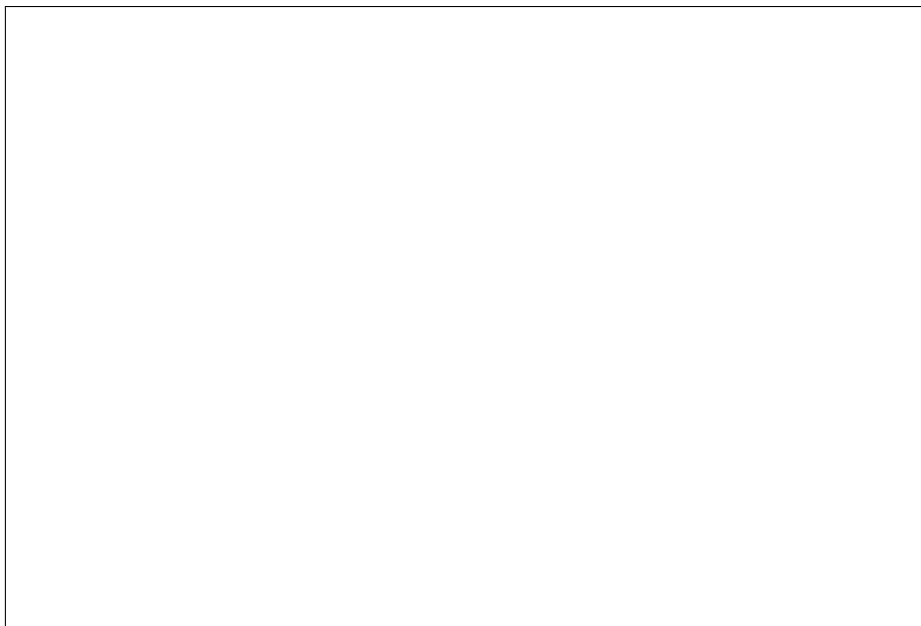
Созданный канал способствует продвижению ионов, вследствие чего начинает формироваться ионный канал. Однако из-за сравнительно большого отношения масс частиц формирование канала и выдувание ионов происходит менее динамично и в более поздний период времени (рис4а).

Еще одно доказательство движения ионов представлено в виде фазовой плоскости (рис5). Возмущения означают увеличение скорости за счет вылета ионов в менее плотную среду.

При прохождении через первый слой импульс вязнет в плазме и выходит из нее с энергией, недостаточной для формирования канала во второй области. На рис.4b продемонстрирован тот факт, что возникает хаотичное движение частиц.



**Рис. 4а.** Распределение плотности ионов, соответствующее моменту времени  $t=525.0$ .



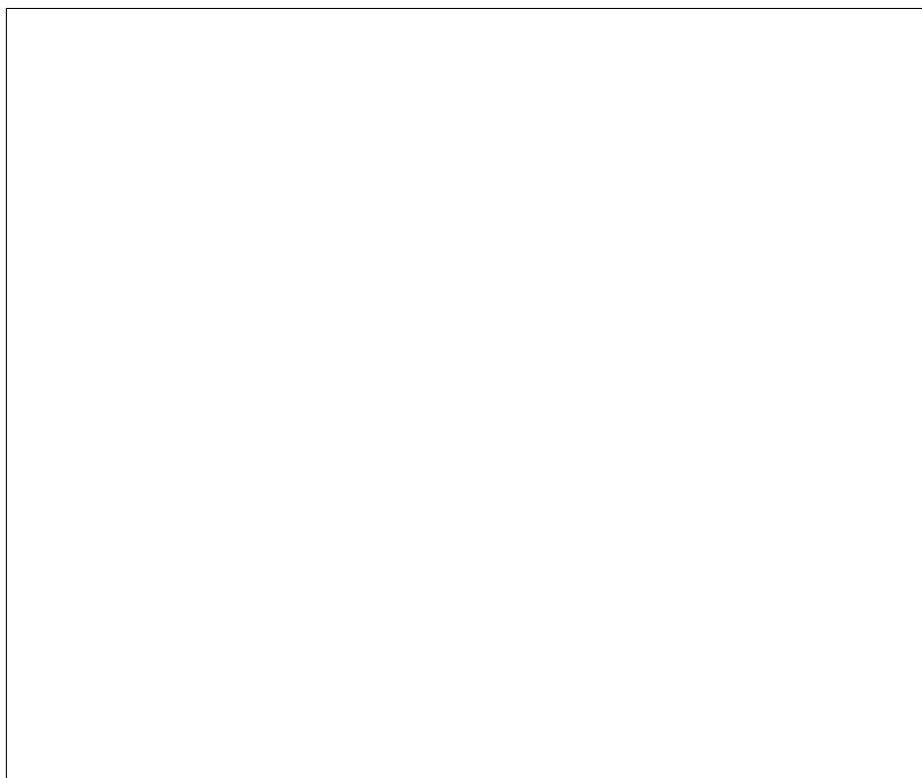
**Рис. 4б.** Распределение плотности ионов, соответствующее моменту времени  $t=1000.0$ .

Следует отметить и тот факт, что при прохождении импульса в первом плазменном слое образуется солитон в момент времени  $t = 45$ , который существует в течение  $\Delta t = 60$ , пока не доходит до правой границы первой зоны (рис.6).

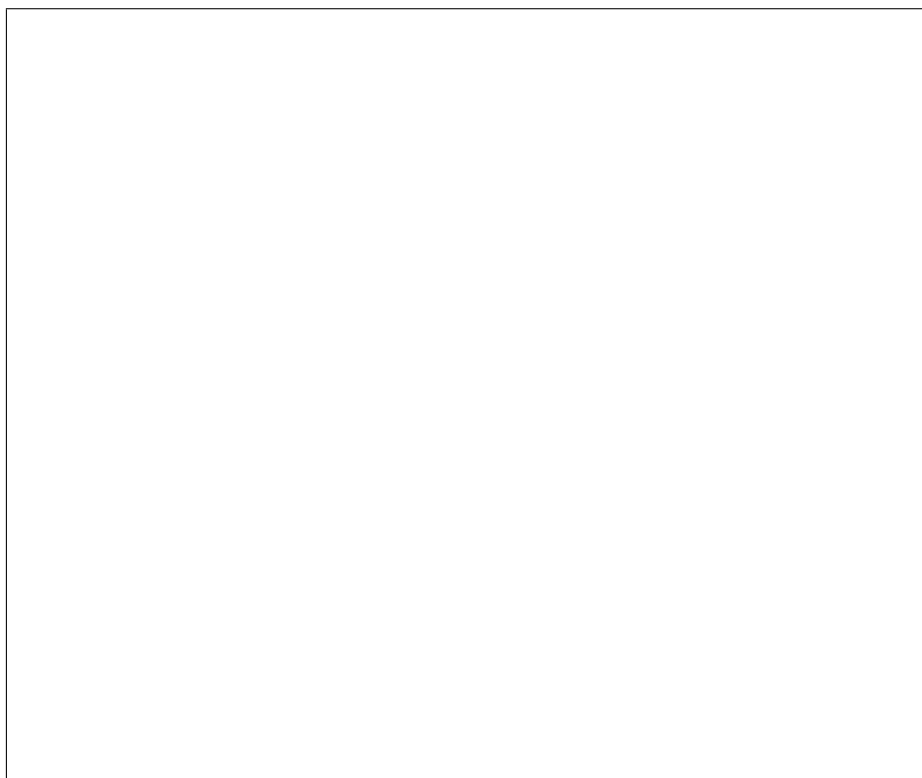
Конечное состояние системы. Канал почти рассеялся, слева наблюдается диффузия электронов под действием отраженной волны, о которой мы упоминали в начале описания опыта.

**Заключение.** В представленной статье приведены результаты численного моделирования ускорения частиц в многослойной плазме с использованием PIC-кода. Рассматривается случай взаимодействия сверхсильного линейно поляризованного импульса с двуслойной нейтральной

плазмой. Получены значения параметров лазерного импульса и среды, при которых образуются электронный и ионный каналы.



**Рис. 5.** Фазовая плоскость  $(x, px)$ .



**Рис. 6.** Электрическое поле в момент времени  $t=82.5$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *G. Mourou, Z. Chang, A. Maksimchuk, et al.* // Plasma Phys. 2002. Rep. 28, 12.
2. *T. Tajima, J. M. Dawson.* // Phys. Rev. Lett. 1998. 43, 267;
3. *N. H. Burnett, G. D. Enright.* // IEEE J. Quantum Electron. 1990. 26, 1797.
4. *K. Krushelnik, E. L. Clark, R. Allot, et al.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2000. 28, 1184.
5. *Р. Хожни, Дж. Иствуд.* Численное моделирование методом частиц. М. Мир, 1987.
6. *Ю. С. Сугов.* Численные методы кинетической теории плазмы. М. МФТИ, 1984.
7. *G. S. Sarkisov, V. Yu. Bychenkov, V. N. Novikov, V. T. Tikhonchuk, A. Maksimchuk, S.-Y. Chen, R. Wagner, G. Mourou, D. Umstadter.* Self-focusing, channel formation, and high-energy ion generation in interaction of an intense short laser pulse with a He jet. // Physical Review E. 1999. vol. 59, 7042-7054.
8. *F. N. Beg, A. R. Bell, A. E. Dangor, C. N. Danson.* A study of picosecond laser-solid interactions up to  $10^{19} \frac{W}{cm^2}$ . // JETP Letters. 2000. Vol 71(6) pp. 246-249.
9. *A. V. Ilev, V. E. Fortov.* One-dimensional plasma expansion into a vacuum in the field of an electromagnetic wave. // Physics of Plasmas. 1999. Vol 6(5) pp. 1508-1514.

Кафедра системного анализа  
ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
19.03.2005 г.



УДК 519.711

# О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2005 г. П. А. Точилин

**1. Введение.** В данной работе рассматривается конкретная гибридная система с линейной структурой – совокупность двух систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и специального множества на плоскости, на котором происходит замена одной системы на другую. Математический объект, называемый "гибридной системой", в настоящее время интенсивно изучается, и является интересным как с точки зрения общей теории таких систем, так и в связи с различными приложениями. Точное математическое описание модели гибридной системы может различаться, в зависимости от изучаемых проблем.

Основной целью данной работы является нахождение методов построения для гибридной системы множества всех ее позиций в фиксированный момент времени, из которых эту систему можно перевести в заданное целевое множество в финальный момент времени (т.е. множества разрешимости). Помимо этого, решается задача построения множества всех позиций гибридной системы таких, что, стартуя из какой-либо из этих позиций в некоторый момент времени из заданного отрезка, траектория гибридной системы может достичь целевого множества в финальный момент времени.

Кроме того, в работе изучаются проблемы, характерные для гибридных систем и являющиеся невозможными при изучении систем, математические модели которых описываются одними лишь линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Среди таких проблем: возможность пустого множества разрешимости, невыпуклость и несвязность данного множества.

В настоящее время проблема описания и построения множеств разрешимости для гибридных систем еще не достаточно хорошо изучена. Существует общий метод построения таких множеств, связанный с использованием эллипсоидальных аппроксимаций, однако в данной работе он не рассматривается: акцент делается на применении методов, существенно использующих характерные черты конкретной гибридной системы, а потому дающих более качественные результаты, нежели общий метод.

Большое внимание в данной работе уделяется различным численным методам для построения упомянутых множеств.

**2. Постановка задачи.** Заданы две системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}x^{(1)} + B^{(1)}u^{(1)} + f^{(1)}(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{(2)} + B^{(2)}u^{(2)} + f^{(2)}(t) \quad (2)$$

Данные системы описывают динамику точки на плоскости ( $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ ),  $u^{(1)}, u^{(2)}$  – двумерные управления, матрицы  $A^{(i)}, B^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) – постоянные,  $f^{(i)}(t)$  – известные вектор-функции. Вначале закон движения точки определяется системой (1). В  $\mathbb{R}^2$  задан прямоугольник  $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}$ , где  $0 < a < b$ ,  $0 < c < d$  – фиксированные константы. Пусть из некоторого начального положения  $^\dagger x_0 = x^{(1)}(t=0)$  выпущена траектория, динамика которой описывается уравнениями (1). При некотором значении  $t$  возможно попадание точки  $x^{(1)}(t)$  на множество  $P$ . При каждом таком попадании точка  $x^{(1)}(t)$  может стать начальной позицией для дальнейшего движения по закону, задаваемому уравнениями (2) (на прямоугольнике  $P$  происходит смена закона движения, переключение системы $^\ddagger$ ). Будем считать, что переключение системы может произойти единственный раз, и после него траектория уже не может сменить закон движения.

Определим теперь класс допустимых управлений  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ :

**Определение 1.** Классом допустимых управлений  $\mathcal{U}(\mathcal{P})$  называется множество программных управлений  $u = u(t)$  – функций, заданных на некотором отрезке времени, являющихся кусочно-непрерывными, непрерывными справа во всех точках и удовлетворяющих всюду некоторым геометрическим ограничениям:  $u(t) \in \mathcal{P}$ . Множество  $\mathcal{P}$ , задающее геометрические ограничения на управление, является компактным и не зависит от  $t$ .

$^\dagger$ Всюду далее применяется следующее обозначение: верхний индекс, взятый в скобки, обозначает номер текущей, активной системы.

$^\ddagger$ Будем далее отличать понятия *переключения управления* (когда в задаче оптимального управления управляющий параметр резко изменяет свое значение) и *переключения системы*, обусловленного ее гибридностью.

Теперь можно определить классы допустимых управлений для систем (1), (2) :  $u^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_1)$ ,  $u^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_2)$ , где  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  - фиксированные компактные множества.

Описанный вкратце объект - это частный случай математической модели гибридной системы с линейной структурой (в данном случае состоящей из двух систем линейных дифференциальных уравнений).

Пусть на плоскости задано некоторое выпуклое, компактное множество  $W$ . Пусть также зафиксирован момент времени  $t_1 > 0$ . Обозначим через  $x^{(i)}(t_1, t_0, x_0 | u^{(i)}(\cdot))$  ( $t_0 \leq t_1$ ,  $u^{(i)}(\cdot) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_i)$ ) точку траектории  $i$ -ой системы в момент времени  $t_1$ , выпущенной из начальной позиции  $(t_0, x^{(i)}(t_0) = x_0)$  и подсчитанной при подстановке в соответствующее дифференциальное уравнение реализации программного управления  $u^{(i)}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

**Определение 2.** Множеством разрешимости  $i$ -ой системы дифференциальных уравнений  $W^{(i)}(t_0, t_1, W)$  в фиксированный момент времени  $t_0 \leq t_1$  называется множество таких векторов  $x$ , для каждого из которых найдется  $u^{(i)}(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_i)$  ( $t \in [t_0, t_1]$ ) такое, что  $x^{(i)}(t_1, t_0, x | u^{(i)}(\cdot)) \in W$ .

Определим теперь множество разрешимости гибридной системы в фиксированный момент времени, построение которого и является основной целью работы.

**Определение 3.** Множеством разрешимости гибридной системы  $W(t_0, t_1, W)$  в фиксированный момент времени  $t_0 \leq t_1$  называется множество таких векторов  $x$ , для которых найдутся  $\tau \in [t_0, t_1]$ ,  $\xi \in P$ ,  $u^{(1)}(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_1)$  ( $t \in [t_0, \tau]$ ),  $u^{(2)}(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_2)$  ( $t \in [\tau, t_1]$ ) такие, что  $x^{(1)}(\tau, t_0, x | u^{(1)}(\cdot)) = \xi$  и  $x^{(2)}(t_1, \tau, \xi | u^{(2)}(\cdot)) \in W$ .

Кроме множества разрешимости  $W(t_0, t_1, W)$  в фиксированный момент времени, будем также исследовать трубку разрешимости - многозначное отображение  $W[t] = W(t, t_1, W)$ ,  $t \in [0, t^*]$ , где параметр  $t^* \in [0, t_1]$  будет пояснен несколько позже. Также в работе будет изучено множество разрешимости гибридной системы на отрезке времени -  $W^*(t_0, t_1, W) = \cup W(t, t_1, W)$ , где объединение берется по  $t \in [t_0, t^*]$ . Его также можно определить следующим образом:

**Определение 4.** Множеством разрешимости гибридной системы  $W^*(t_0, t_1, W)$  на отрезке времени  $[t_0, t^*]$  называется множество таких векторов  $x$ , для которых найдутся  $\tilde{t} \in [t_0, t^*]$ ,  $\tau \in [\tilde{t}, t_1]$ ,  $\xi \in P$ ,  $u^{(1)}(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_1)$  ( $t \in [\tilde{t}, \tau]$ ),  $u^{(2)}(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_2)$  ( $t \in [\tau, t_1]$ ) такие, что  $x^{(1)}(\tau, \tilde{t}, x | u^{(1)}(\cdot)) = \xi$  и  $x^{(2)}(t_1, \tau, \xi | u^{(2)}(\cdot)) \in W$ .

Для определенности, в качестве начального момента времени  $t_0$  будем далее рассматривать  $t_0 = 0$ . Кроме того, будем считать, что множество  $W$  - это шар радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $p = (p_1, p_2)'$ .

Пусть система (1) задается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} \\ \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что данная система неуправляема и имеет траектории, однозначно зависящие от начальных значений  $x^{(1)}(0)$ . Множество  $\mathcal{P}_1$  можно определить произвольным образом.

Пусть система (2) задается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = u_1^{(2)} + \lambda \cos(t) \\ \dot{x}_2^{(2)} = u_2^{(2)} - \mu \sin(t) \end{cases} \quad (4)$$

Для системы (4)  $\mathcal{P}_2 = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 \leq \varepsilon^2\}$ . Параметры  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  положительны и считаются известными. Траектории данной системы (без учета управления) совершают вращательное движение по эллипсу с нулевым центром и полуосями  $\lambda$  и  $\mu$ .

Ниже будет приведено описание искомых множеств  $W(t_0 = 0, t_1, W)$ ,  $W[t]$ ,  $W^*(t_0 = 0, t_1, W)$ , а также численные методы поиска их аппроксимаций. Заметим, что рассмотрение именно нулевого начального момента времени не принципиально: точно такие же методы можно задействовать при поиске множеств разрешимости  $W(t_0, t_1, W)$  и  $W^*(t_0, t_1, W)$  в произвольный момент  $t_0 < t_1$ .

**3. Пустота множества разрешимости гибридной системы. Поиск моментов переключения системы.** В приведенном выше определении множества разрешимости гибридной системы требуется, чтобы на соответствующих траекториях происходило переключение системы на множестве  $P$ . Данное требование выполняется не при всех значениях параметров и не при всех величинах  $t_1$ . Изучим, когда оно все же выполняется, и когда множество разрешимости, построенное согласно определению, не будет пустым.

Рассмотрим сначала систему (4). Найдем моменты времени и подмножества множества  $P$ , стартуя с которых и двигаясь по закону, описываемому уравнениями (4) при некотором  $u^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_2)$ , точка

$x^{(2)}(t_1)$  попадает во множество  $W$ . Согласно формуле Коши для представления решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для множества разрешимости второй системы справедливо выражение:

$$\begin{aligned} W^{(2)}(t, t_1, W) &= X^{(2)}(t, t_1)W - \int_t^{t_1} \left( X^{(2)}(t, \tau)P_2 + \begin{pmatrix} \lambda \cos \tau \\ -\mu \sin \tau \end{pmatrix} \right) d\tau = \\ &= \mathbb{B}_{r+\varepsilon(t_1-t)}(p) + \begin{pmatrix} \lambda(\sin t - \sin t_1) \\ \mu(\cos t - \cos t_1) \end{pmatrix} = \mathbb{B}_{r+\varepsilon(t_1-t)}(p(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\mathbb{B}_{r+\varepsilon(t_1-t)}(p(t))$  - шар радиуса  $r + \varepsilon(t_1 - t)$  с центром в точке  $p(t)$ . Фундаментальная матрица  $X^{(2)}(t, \tau)$  определяется из следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial X^{(2)}(t, \tau)}{\partial t} = 0 \\ X^{(2)}(\tau, \tau) = E \end{cases}, \text{ а значит } X^{(2)}(t, \tau) = E$$

Вектор  $p(t)$  определяется следующим образом:

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = p + \begin{pmatrix} \lambda(\sin t - \sin t_1) \\ \mu(\cos t - \cos t_1) \end{pmatrix}$$

Анализируя опорную функцию ко множеству  $W^{(2)}(t, t_1, W)$  в направлениях  $(1, 0)'$ ,  $(-1, 0)'$ ,  $(0, 1)'$ ,  $(0, -1)'$ , видим, что необходимым условием пересечения  $W^{(2)}(t, t_1, W)$  и  $P$  является одновременное выполнение следующих неравенств:

$$p_1 + r + \varepsilon(t_1 - t) + \lambda(\sin t - \sin t_1) \geq a \quad (6)$$

$$-p_1 + r + \varepsilon(t_1 - t) - \lambda(\sin t - \sin t_1) \geq -b \quad (7)$$

$$p_2 + r + \varepsilon(t_1 - t) + \mu(\cos t - \cos t_1) \geq c \quad (8)$$

$$-p_2 + r + \varepsilon(t_1 - t) - \mu(\cos t - \cos t_1) \geq -d \quad (9)$$

Для получения необходимых и достаточных условий будем рассматривать три разных случая: 1)  $p(t) \in P$ , 2)  $p_1(t) \in [a, b]$  или  $p_2(t) \in [c, d]$ , но  $p(t) \notin P$ , 3)  $p_1(t) \notin [a, b]$  и  $p_2(t) \notin [c, d]$ . В первом случае имеет место непустое пересечение множеств  $W^{(2)}(t, t_1, W)$  и  $P$ . В случае 2) выполнения неравенств (6)-(9) достаточно для того, чтобы указанные множества пересекались. Рассмотрим случай 3). Пусть  $q = (q_1, q_2)'$  - та из четырех вершин  $P$ , которая ближе всего к точке  $p(t)$ . Тогда необходимое и достаточное условие пересечения множеств имеет следующий вид:

$$\|p(t) - q\| \leq r + \varepsilon(t_1 - t) \quad (10)$$

Из приведенного выше следует, что множество разрешимости гибридной системы  $W(0, t_1, W)$  не будет пустым, если найдется хотя бы одно значение  $t \in [0, t_1]$ , для которого будут выполняться неравенства (6)-(9) или условие (10), в зависимости от положения точки  $p(t)$ . В данном случае необходимыми условиями непустоты множества разрешимости являются следующие ограничения на параметры системы (только при таких ограничениях для каждого из неравенств (6)-(9) найдется  $t \in [0, t_1]$ , при котором оно выполняется ( $t$  - свое для каждого неравенства)):

$$\begin{cases} a + \lambda \sin(t_1) - p_1 - r - \varepsilon t_1 \leq M_1 \\ -b - \lambda \sin(t_1) + p_1 - r - \varepsilon t_1 \leq M_2 \\ c + \mu \cos(t_1) - p_2 - r - \varepsilon t_1 \leq \mu \\ -d - \mu \cos(t_1) + p_2 - r - \varepsilon t_1 \leq M_4 \end{cases} \quad (11)$$

$$M_1 = \begin{cases} \lambda \sin(\arccos(\varepsilon/\lambda)) - \varepsilon \arccos(\varepsilon/\lambda) & , \text{ если } \varepsilon \leq \lambda \text{ и } \arccos(\varepsilon/\lambda) \in [0, t_1] \\ \lambda \sin(t_1) - \varepsilon t_1 & , \text{ если } \varepsilon \leq \lambda \text{ и } \arccos(\varepsilon/\lambda) \geq t_1 \\ 0 & , \text{ если } \varepsilon > \lambda \end{cases}$$

$$M_2 = \begin{cases} \max\{0, \lambda \sin(\arccos(\varepsilon/\lambda)) - \varepsilon(\pi + \arccos(\varepsilon/\lambda))\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \lambda, \pi + \arccos(\varepsilon/\lambda) \in [0, t_1] \\ & \text{ и } \lambda \sin(\arccos(\varepsilon/\lambda)) \geq \varepsilon \arccos(\varepsilon/\lambda) \\ \max\{0, -\lambda \sin(\arccos(\varepsilon/\lambda)) - \varepsilon(\pi - \arccos(\varepsilon/\lambda))\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \lambda, \pi + \arccos(\varepsilon/\lambda) \in [0, t_1] \\ & \text{ и } \lambda \sin(\arccos(\varepsilon/\lambda)) \leq \varepsilon \arccos(\varepsilon/\lambda) \\ \max\{0, -\lambda \sin(\arccos(\varepsilon/\lambda)) - \varepsilon(\pi - \arccos(\varepsilon/\lambda))\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \lambda, \pi + \arccos(\varepsilon/\lambda) \notin [0, t_1] \\ & \text{ и } \pi - \arccos(\varepsilon/\lambda) \in [0, t_1] \\ \max\{0, -\lambda \sin(t_1) - \varepsilon t_1\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \lambda \text{ и } \pi - \arccos(\varepsilon/\lambda) \notin [0, t_1] \\ 0 & , \text{ если } \varepsilon > \lambda \end{cases}$$

$$M_4 = \begin{cases} \max\{0, -\mu \cos(\arcsin(\varepsilon/\mu)) - \varepsilon(\arcsin(\varepsilon/\mu))\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \mu, \arcsin(\varepsilon/\mu) \in [0, t_1] \\ & \text{и } 2\mu \cos(\arcsin(\varepsilon/\mu)) \leq \varepsilon(\pi - \arcsin(\varepsilon/\mu)) \\ \max\{0, \mu \cos(\arcsin(\varepsilon/\mu)) - \varepsilon(\pi - 2 \arcsin(\varepsilon/\mu))\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \mu, \arcsin(\varepsilon/\mu) \in [0, t_1] \\ & \text{и } 2\mu \cos(\arcsin(\varepsilon/\mu)) \geq \varepsilon(\pi - \arcsin(\varepsilon/\mu)) \\ \max\{0, \mu \cos(\arcsin(\varepsilon/\mu)) - \varepsilon(\pi - 2 \arcsin(\varepsilon/\mu))\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \mu, \arcsin(\varepsilon/\mu) \notin [0, t_1] \\ & \text{и } \pi - \arcsin(\varepsilon/\mu) \in [0, t_1] \\ \max\{0, -\mu \cos(t_1) - \varepsilon t_1\} & , \text{ если } \varepsilon \leq \mu \text{ и } \pi - \arcsin(\varepsilon/\mu) \notin [0, t_1] \\ 0 & , \text{ если } \varepsilon > \mu \end{cases}$$

Всюду далее будем считать, что данные ограничения выполняются. Найдем множество  $\Delta = \{\tau\} \subseteq [0, t_1]$ , на котором происходит пересечение множеств  $W^{(2)}(\tau, t_1, W)$  и  $P$ . В случае, если они пересекаются хотя бы в один момент времени, множество  $\Delta$  всегда является объединением конечного числа отрезков (некоторые из которых могут вырождаться в точки). Если же указанные множества не пересекаются, то  $\Delta$  - пустое множество.

Будем сначала искать множество  $\Delta'$  моментов времени  $t$ , для которых выполняются условия (6)-(9). Предположим, что множество  $\Delta'$  не пусто. Справедливо вложение:  $\Delta \subseteq \Delta'$ .

Представим множество  $P$  в следующем виде:

$$P = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \quad (12)$$

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq a\}, G_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \leq b\}$$

$$G_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 \geq c\}, G_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq d\}$$

Для множества  $\Delta'$  справедливо аналогичное представление:  $\Delta' = \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \cap \Delta_4$ , где  $\Delta_i$  - множество моментов  $\tau \in [0, t_1]$ , для которых  $W^{(2)}(\tau, t_1, W) \cap G_i \neq \emptyset$ . Каждое множество  $\Delta_i$  имеет следующую структуру:  $[t_{min,i,1}, t_{max,i,1}] \cup [t_{min,i,2}, t_{max,i,2}] \cup \dots \cup [t_{min,i,M_i}, t_{max,i,M_i}]$  ( $M_i$  - некоторое натуральное число). Все эти отрезки можно найти из соответствующего неравенства из (6)-(9). В силу выполнения условий (11), каждое из множеств  $\Delta_i$  не пусто. Таким образом, используя неравенства (6)-(9), можно найти все множества  $\Delta_i$ , а значит и множество  $\Delta'$ . Заметим, что множество  $\Delta'$  можно эффективно найти приближенно, используя численные методы решения нелинейных скалярных алгебраических уравнений.

Определим следующие вспомогательные множества:

$$\tilde{\Delta} = \{t : p_1(t) > b, p_2(t) > d\} \cup \{t : p_1(t) < a, p_2(t) > d\} \cup \{t : p_1(t) < a, p_2(t) < c\} \cup \{t : p_1(t) > b, p_2(t) < c\}$$

$$\Delta^* = \{t : \min_{q-\text{вершина } P} \|p(t) - q\| \leq r + \varepsilon(t_1 - t)\}$$

Данные множества (быть может, пустые) можно легко найти численно. Процедура их поиска аналогична описанной выше для множества  $\Delta'$ .

Наконец, для множества  $\Delta$  справедливо следующее выражение:

$$\Delta = \Delta' \cap ((\Delta^* \cap \tilde{\Delta}) \cup \tilde{\Delta}^c) \quad (13)$$

Формула (13) вместе с предшествующими ей обоснованиями дает возможность реализовать численный метод для поиска множества  $\Delta$  со сколь угодно большой точностью.

Теперь определим уже упоминавшийся выше момент времени  $t^* \in [0, t_1]$ . Легко видеть, что для того, чтобы трубка разрешимости  $W[t]$  была всегда не пуста (не вырождалась) на отрезке  $t \in [0, t^*]$ , надо положить  $t^* < t_{max,M}$ . Здесь  $t_{max,M}$  - правый конец последнего из временных сегментов, составляющих множество  $\Delta$ .

**4. Построение аппроксимации множества разрешимости.** Рассмотрим систему (3). Пусть  $W^{(1)}(\tau) = P \cap W^{(2)}(\tau, t_1, W)$ ,  $\tau \in \Delta$ . Необходимо решить следующую задачу: найти такое множество  $W^{(1)}(t, \tau, W^{(1)}(\tau))$ ,  $t \in [0, \tau]$ , начиная двигаться из которого в момент времени  $t$  согласно уравнениям (1), точка  $x^{(1)}(\tau)$  попадет во множество  $W^{(1)}(\tau)$ . Данную задачу можно решить снова с помощью формулы Коши для представления решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} W^{(1)}(t, \tau, W^{(1)}(\tau)) &= X^{(1)}(t, \tau)W^{(1)}(\tau) = e^{(t-\tau)A^{(1)}}W^{(1)}(\tau) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\tau - t) & -\sin(\tau - t) \\ \sin(\tau - t) & \cos(\tau - t) \end{pmatrix} W^{(1)}(\tau) \end{aligned} \quad (14)$$

Фундаментальная матрица  $X^{(1)}(t, \tau)$  определяется из следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial X^{(1)}(t, \tau)}{\partial t} = A^{(1)} X^{(1)}(t, \tau) \\ X^{(1)}(\tau, \tau) = E \end{cases}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, множество  $W^{(1)}(t = 0, \tau, W^{(1)}(\tau))$  получается из множества  $W^{(1)}(\tau)$  поворотом на угол  $\tau$  против часовой стрелки.

Теперь легко найти решение и основной задачи: для множества разрешимости гибридной системы в фиксированный начальный момент времени справедливо представление:

$$W(t = 0, t_1, W) = \bigcup_{\tau \in \Delta} W^{(1)}(t = 0, \tau, W^{(1)}(\tau)) \quad (15)$$

**4.1. Внутренняя аппроксимация.** Непосредственно из формулы (15) видно, что для множества  $W(0, t_1, W)$  можно численно построить внутреннюю аппроксимацию по следующему алгоритму:

- 1) Исходя из описанных выше формул (6)-(10), (12), (13) находится приближенно множество  $\Delta$ . Строится разбиение этого множества (равномерная сетка по  $\tau \in \Delta$ ).
- 2) Для каждого из узлов разбиения  $\tau_i$  строится многоугольник  $P(\tau_i)$ , аппроксимирующий изнутри множество  $W^{(1)}(\tau_i)$ . При этом возможны два варианта: либо перебираются все возможные ситуации, возникающие при пересечении круга  $W^{(2)}(\tau_i, t_1, W)$  и прямоугольника  $P$  (их насчитывается 13, а с учетом пространственной ориентации - 45) и  $W^{(1)}(\tau_i)$  получается по явным, простым формулам, либо же используется представление (12), строятся многоугольники, аппроксимирующие изнутри множества  $W^{(2)}(\tau_i, t_1, W) \cap G_i$ , а многоугольник, аппроксимирующий  $W^{(1)}(\tau_i)$ , находится численно, как их пересечение.
- 3) Каждое из построенных множеств  $P(\tau_i)$  преобразуется в соответствии с (14). Объединение получившихся многоугольников и есть искомая внутренняя аппроксимация множества разрешимости гибридной системы.

Оценим точность подобной внутренней аппроксимации. Будем считать, что множество  $\Delta$  нам известно точно. Пусть  $h(A, B)$  - хаусдорфово расстояние между компактами  $A$  и  $B$ , т.е.

$$h(A, B) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A + \mathbb{B}_\varepsilon(0) \supseteq B, B + \mathbb{B}_\varepsilon(0) \supseteq A\}$$

Будем считать, что аппроксимирующие многоугольники  $P(\tau_i)$  строятся так, что  $P(\tau_i) \subseteq W^{(1)}(\tau_i)$ ,  $h(P(\tau_i), W^{(1)}(\tau_i)) \leq K$ , где  $K$  - некоторая константа. При вращении множеств относительно начала координат на один и тот же угол хаусдорфово расстояние между ними не изменяется, т.е.  $h(X^{(1)}(t, \tau_i)P(\tau_i), X^{(1)}(t, \tau_i)W^{(1)}(\tau_i)) \leq K$ . Следовательно, справедливо неравенство:

$$h\left(\bigcup_i X^{(1)}(0, \tau_i)P(\tau_i), \bigcup_i W^{(1)}(0, \tau_i, W^{(1)}(\tau_i))\right) \leq K \quad (16)$$

Согласно формуле (5) и определению множества  $W^{(1)}(\tau)$ , для достаточно малых значений  $\theta > 0$  справедливо соотношение:

$$h(W^{(1)}(\tau), W^{(1)}(\tau + \theta)) \leq \varepsilon\theta + \sqrt{\lambda^2(\sin(\tau + \theta) - \sin(\tau))^2 + \mu^2(\cos(\tau + \theta) - \cos(\tau))^2} \quad (17)$$

Так как  $W^{(1)}(\tau) \subseteq P$  для любых  $\tau \in \Delta$ , то расстояние между множествами  $W^{(1)}(\tau)$  и  $W^{(1)}(\tau + \theta)$  после их поворота на углы  $\tau$  и  $\tau + \theta$  соответственно можно оценить следующим образом:

$$h(X^{(1)}(0, \tau)W^{(1)}(\tau), X^{(1)}(0, \tau + \theta)W^{(1)}(\tau + \theta)) \leq \sqrt{2(b^2 + d^2)(1 - \cos \theta)} + \varepsilon\theta + \sqrt{\lambda^2(\sin(\tau + \theta) - \sin(\tau))^2 + \mu^2(\cos(\tau + \theta) - \cos(\tau))^2} \quad (18)$$

Пусть для любого  $\tau \in \Delta$  найдется такое  $\tau_{i(\tau)}$  из сетки  $\{\tau_i\}$ , что  $|\tau - \tau_{i(\tau)}| \leq \delta$ , где  $\delta$  - некоторая константа. Тогда будет справедливо соотношение:

$$h\left(\bigcup_i W^{(1)}(0, \tau_i, W^{(1)}(\tau_i)), \bigcup_{\tau \in \Delta} W^{(1)}(0, \tau, W^{(1)}(\tau))\right) \leq \sqrt{2(b^2 + d^2)(1 - \cos \delta)} + \varepsilon\delta + \sqrt{\lambda^2(\sin(\tau + \delta) - \sin(\tau))^2 + \mu^2(\cos(\tau + \delta) - \cos(\tau))^2} \quad (19)$$

Теперь можно оценить точность построенной аппроксимации:

$$\begin{aligned}
& h \left( \bigcup_i X^{(1)}(0, \tau_i) P(\tau_i), \bigcup_{\tau \in \Delta} W^{(1)}(0, \tau, W^{(1)}(\tau)) \right) \leq \\
& \leq h \left( \bigcup_i W^{(1)}(0, \tau_i, W^{(1)}(\tau_i)), \bigcup_{\tau \in \Delta} W^{(1)}(0, \tau, W^{(1)}(\tau)) \right) + \\
& + h \left( \bigcup_i X^{(1)}(0, \tau_i) P(\tau_i), \bigcup_i W^{(1)}(0, \tau_i, W^{(1)}(\tau_i)) \right) \leq \\
& \leq K + \sqrt{2(b^2 + d^2)(1 - \cos \delta)} + \varepsilon \delta + \sqrt{\lambda^2(\sin(\tau + \delta) - \sin(\tau))^2 + \mu^2(\cos(\tau + \delta) - \cos(\tau))^2} \quad (20)
\end{aligned}$$

Из формулы (20) видно, что качество аппроксимации улучшается при одновременном увеличении числа точек в сетке по  $\tau \in \Delta$  (т.е. при уменьшении параметра  $\delta$ ) и при улучшении точности аппроксимации множеств  $W^{(1)}(\tau_i)$  многогранниками  $P(\tau_i)$  (т.е. при уменьшении величины  $K$ ).

Аналогичным образом можно построить внутренние аппроксимации для множества  $W^*(t = 0, t_1, W)$  и для трубки разрешимости  $W[t]$ : надо лишь ввести сетку  $\{t^i\}$  по параметру  $t \in [0, t^*]$ , для каждого значения  $t^i$  при помощи описанного выше алгоритма построить аппроксимацию  $W(t^i, t_1, W)$ . Далее, в случае с  $W^*(t = 0, t_1, W)$  надо взять объединение построенных аппроксимаций. В случае с трубкой разрешимости надо проинтерполировать многозначное отображение на отрезках  $[t^i, t^{i+1}]$  с учетом найденных аппроксимаций в граничных точках этих отрезков. В полной аналогии с приведенным выше можно найти оценки точности построенных аппроксимаций.

**4.2. Внешняя аппроксимация.** Прежде всего, из характера системы (1), из формы множества  $P$  и формул (14), (15) можно вывести следующие вложения:

- Если  $t_1 - t + \arctg(d/a) - \arctg(c/b) \geq 2\pi$ , то

$$W(t, t_1, W) \subseteq \{x = (x_1, x_2)' = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))' | r \in [\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + d^2}], \alpha \in [0, 2\pi]\} \quad (21)$$

- Если  $t_1 - t + \arctg(d/a) - \arctg(c/b) < 2\pi$ , то

$$\begin{aligned}
W(t, t_1, W) \subseteq \{x = (x_1, x_2)' = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))' | r \in [\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + d^2}], \\
\alpha \in [\arctg(c/b), \arctg(d/a) + t_1 - t]\} \quad (22)
\end{aligned}$$

Теперь получим грубую оценку выпуклой оболочки множества  $W(0, t_1, W)$ , оценив сверху значения соответствующей опорной функции в произвольном фиксированном направлении  $l$  ( $\|l\| = 1$ ):

$$\begin{aligned}
\rho(l|W(0, t_1, W)) &= \rho(l | \bigcup_{\tau \in \Delta} (X^{(1)}(0, \tau)(P \cap W^{(2)}(\tau, t_1, W))) = \\
&= \max_{\tau \in \Delta} \rho(l | X^{(1)}(0, \tau)(P \cap W^{(2)}(\tau, t_1, W))) \leq \\
&\leq \max_{\tau \in \Delta} \min\{\rho(l | X^{(1)}(0, \tau)P), \rho(l | X^{(1)}(0, \tau)W^{(2)}(\tau, t_1, W))\} \leq \\
&\leq \min\{\max_{\tau \in \Delta} \rho(l | X^{(1)}(0, \tau)P), \max_{\tau \in \Delta} \rho(l | X^{(1)}(0, \tau)W^{(2)}(\tau, t_1, W))\} \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\max_{\tau \in \Delta} \rho(l | X^{(1)}(0, \tau)P) = \max\{\max_{\tau \in \Delta} \langle l, X^{(1)}(0, \tau)v_1 \rangle, \dots, \max_{\tau \in \Delta} \langle l, X^{(1)}(0, \tau)v_4 \rangle\} \quad (24)$$

В последнем соотношении  $v_1, \dots, v_4$  - вершины прямоугольника  $P$ .

Введем вспомогательное множество (которое еще будет в дальнейшем использовано):

$$\hat{\Delta} = (\Delta \cap [0, 2\pi]) \cup ((\Delta \cap [2\pi, 4\pi]) - 2\pi) \cup \dots \cup ((\Delta \cap [2\pi(k-1), 2\pi k]) - 2\pi(k-1)) \quad (25)$$

В данном выражении  $k \geq 1$  - наименьшее натуральное число, такое, что  $2\pi k \geq t$ ,  $\forall t \in \Delta$ .

Пусть  $\phi(l)$  - угол вектора  $l$  в полярной системе координат ( $\phi(l) \in [0, 2\pi)$ ). Для каждого  $i = 1, 2, 3, 4$  решаем следующую подзадачу:

$$\tau_i^* = \operatorname{argmin}\{\min\{\|\phi(v_i) + \tau - \phi(l)\|, \|\phi(v_i) + \tau - \phi(l) + 2\pi\|, \|\phi(v_i) + \tau - \phi(l) - 2\pi\|\} | \tau \in \hat{\Delta}\}$$

Тогда справедливо следующее выражение:

$$\max_{\tau \in \Delta} \rho(l|X(\tau)P) = \max\{\langle l, X(\tau_1^*)v_1 \rangle, \langle l, X(\tau_2^*)v_2 \rangle, \langle l, X(\tau_3^*)v_3 \rangle, \langle l, X(\tau_4^*)v_4 \rangle\} \quad (26)$$

Для величины  $\max_{\tau \in \Delta} \rho(l|X(\tau)W^{(2)}(\tau, t_1, W))$  выполняется соотношение:

$$\max_{\tau \in \Delta} \rho(l|X(\tau)W^{(2)}(\tau, t_1, W)) = \max_{\tau \in \Delta} (\langle l, X(\tau)p(\tau) \rangle + r + \varepsilon(t_1 - \tau)) \quad (27)$$

Функция, зависящая от  $\tau$  и стоящая под максимумом в последней формуле, является гладкой, и ее максимизацию на множестве  $\Delta$  можно проводить численно.

Таким образом, указан метод подсчета некоторой аппроксимации опорной функции в заданном направлении  $l$ . Заметим, что выражение, стоящее в правой части (23), как функция от  $l$ , вообще говоря, не является опорной функцией к какому-то множеству, но все же позволяет построить внешнюю аппроксимацию к выпуклой оболочке множества  $W(0, t_1, W)$  (некоторый аппроксимирующий многоугольник). Для уточнения аппроксимации полезно также задействовать оценки (21), (22), способные сделать результирующее аппроксимирующее множество невыпуклым.

**5. Использование функции цены.** Множество разрешимости для гибридной системы можно также описать при помощи специальным образом построенной функции цены.

Будем рассматривать следующую функцию:

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot), x^* \in P} \{d(x^{(2)}(t_1), W) | x^{(1)}(t) = x\} \quad (28)$$

Здесь минимум берется по всевозможным допустимым траекториям гибридной системы, т.е. таким траекториям, которые стартуют из точки  $x$ , изменяются вначале в соответствии с системой (3), в некоторый момент достигают множества  $P$  (быть может не впервые и не обязательно на границе), переключаются на систему (4) и далее изменяются в соответствии с ее уравнениями (при некотором управлении  $u^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{U}(P_2)$ ) вплоть до момента времени  $t_1$ . Для тех точек  $(t, x)$ , для которых допустимых траекторий не существует (невозможно к моменту времени  $t_1$  дойти до  $P$ , двигаясь в силу системы (3)), положим  $V(t, x) = +\infty$ . Для функции  $V(t, x)$  справедливо следующее выражение<sup>§</sup>:

$$V(t, x) = \min_{x^* \in P, \tau \in [t, t_1]} \{(1 - \text{sgn}(\|X^{(1)}(\tau, t)x - x^*\|))V^{(2)}(\tau, x^*) + \text{sgn}(\|X^{(1)}(\tau, t)x - x^*\|)(+\infty)\} \quad (29)$$

Здесь функция  $V^{(2)}(t, x)$  определяется следующим образом:

$$V^{(2)}(t, x) = \min_{u(\cdot)} \{d(x^{(2)}(t_1), W) | x^{(2)}(t) = x\}$$

В данном выражении минимизация ведется по траекториям системы (4) (негибридной), соответствующим всевозможным управлениям  $u(\cdot) \in \mathcal{U}(P_2)$ . Функцию  $V^{(2)}(t, x)$  при помощи методов выпуклого анализа (описанных, например, в [1]) можно представить в виде:

$$V^{(2)}(t, x) = \max_{l: \|l\| \leq 1} \{\langle l, x - p + g(t) \rangle - (\varepsilon(t_1 - t) + r)\|l\|\} = \max\{0, \|x - p + g(t)\| - (\varepsilon(t_1 - t) + r)\} \quad (30)$$

В последнем выражении использовано следующее обозначение:

$$g(t) = \int_t^{t_1} \begin{pmatrix} \lambda \cos(t) \\ -\mu \sin(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \lambda(\sin(t_1) - \sin(t)) \\ \mu(\cos(t_1) - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

Формула (29) выражает простую идею: для минимизации функционала в (28) надо сначала узнать, можно ли в принципе дойти до множества  $P$  за имеющееся время, а если можно, то надо найти наиболее выгодную позицию для переключения на систему (4).

Из определения функции  $V(t, x)$  видно, что для искомого множества разрешимости справедливо выражение:

$$W(0, t_1, W) = \{x \in \mathbb{R}^2 | V(0, x) \leq 0\} \quad (31)$$

Следовательно, зная функцию цены, можно найти множество разрешимости.

<sup>§</sup>Считаем, что  $0 \cdot (+\infty) = 0$ ,  $c \cdot (+\infty) = (+\infty)$ ,  $\forall c > 0$ . Можно обойтись и без этого искусственного соглашения, если вместо  $+\infty$  взять какое-то фиксированное достаточно большое число.

Аналогично, при помощи данной функции цены можно построить трубку разрешимости  $W[t]$  и множество  $W^*(0, t_1, W)$ :

$$W[t] = \{x \in \mathbb{R}^2 | V(t, x) \leq 0\}, \forall t \in [0, t^*] \quad (32)$$

$$W^*(0, t_1, W) = \{x \in \mathbb{R}^2 | (\min_{t \in [0, t^*]} \{V(t, x)\}) \leq 0\} \quad (33)$$

Заметим, что формулу (29) можно улучшить: во-первых, минимизацию можно проводить не по всем  $\tau \in [t, t_1]$ , а только по тем, которые лежат во множестве  $\Delta$ . Во-вторых, можно учитывать только такие точки  $(t, x)$ , для которых  $x$  лежит во множествах, фигурирующих в правых частях оценок (21), (22). Соответственно, те точки  $x$ , которые не лежат в этих множествах могут не рассматриваться при вычислении функции цены по формуле (29): в таких точках  $V(t, x) = +\infty$ .

При помощи формулы (29) можно реализовать численный метод для построения множества разрешимости гибридной системы, ее трубки разрешимости и множества  $W^*(0, t_1, W)$ .

**6. О свойствах множества разрешимости.** Рассмотрение различных примеров множеств разрешимости изучаемой гибридной системы при конкретных параметрах приводит к следующим выводам: множество разрешимости  $W(0, t_1, W)$  зачастую является 1) невыпуклым, 2) несвязным. Хорошо известно, что для математических моделей, описываемых при помощи систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, появление подобных множеств разрешимости невозможно. Невыпуклость и несвязность множества разрешимости, таким образом, является характерными особенностями гибридных систем. Данное замечание также относится и ко множеству  $W^*(0, t_1, W)$ .

В качестве примера, на рис. 42 приведено множество  $W(0, t_1, W)$  при следующих значениях параметров системы:  $p = (4, -2)'$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 2$ ,  $r = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\mu = 3$ ,  $\lambda = 2$ ,  $t_1 = 10$ . На рис. 43 приведено множество  $W^*(0, t_1, W)$  для той же системы, при  $t^* = 5$ . Видно, что оба множества являются невыпуклыми, а  $W(0, t_1, W)$  еще и несвязным.

**Рис. 42.** Невыпуклое и несвязное множество разрешимости  $W(0, t_1, W)$ .

Приведем достаточные условия ситуации, когда множества  $W(0, t_1, W)$  и  $W^*(0, t_1, W)$  являются 1) невыпуклыми, 2) несвязными. Эти условия можно получить из характера системы (3), из формы множества  $P$  и формул (14), (15).

Можно утверждать, что  $W(0, t_1, W)$  не является выпуклым, если во множестве  $\hat{\Delta}$  найдется такой отрезок  $[t^1, t^2]$ , что его длина удовлетворяет следующему ограничению:

$$t^2 - t^1 > 2 \arccos \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) \quad (34)$$



**Рис. 43.** Невыпуклое, но связное множество  $W^*(0, t_1, W)$ .

Можно также сформулировать такое достаточное условие невыпуклости: если отрезки  $[0, t^1]$  и  $[t^2, 2\pi]$  принадлежат множеству  $\hat{\Delta}$  и выполняется неравенство:

$$2\pi - t^2 + t^1 > 2 \arccos \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) \quad (35)$$

то множество разрешимости  $W(0, t_1, W)$  будет невыпуклым.

При выполнении хотя бы одного из этих условий множество  $W^*(0, t_1, W)$  также будет невыпуклым. Кроме того, множество  $W(0, t_1, W)$  ( $W^*(0, t_1, W)$ ) не является выпуклым, если оно не является связным (достаточные условия несвязности смотрите ниже). Приведенные условия описывают отнюдь не все случаи отсутствия выпуклого множества разрешимости. Например, указанные достаточные условия невыпуклости не выполняются для множества разрешимости из приведенного выше примера.

Пусть введенное выше множество  $\hat{\Delta}$  состоит из отрезков  $[t_{1,min}, t_{1,max}], \dots, [t_{K,min}, t_{K,max}]$ , где  $K$  - натуральное число, все значения  $t_{i,\cdot}$  лежат на отрезке  $[0, 2\pi]$ , и  $t_{i,max} < t_{i+1,min}$  для всех  $i = 1, \dots, K - 1$ . Можно утверждать, что множество разрешимости гибридной системы  $W(0, t_1, W)$  не является связным (имеет не менее двух компонент связности), если  $K > 1$  и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- во множестве  $\hat{\Delta}$  найдется отрезок  $[t_{i,min}, t_{i,max}]$ , при  $1 < i < K$  такой, что

$$\begin{cases} t_{i,min} > t_{i-1,max} + \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) \\ t_{i,max} < t_{i+1,min} - \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) \end{cases} \quad (36)$$

- выполняются неравенства:

$$\begin{cases} t_{1,min} + 2\pi > t_{K,max} + \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) \\ t_{1,max} < t_{2,min} - \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) \end{cases} \quad (37)$$

- выполняются неравенства:

$$\begin{cases} t_{K,min} > t_{K-1,max} + \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) \\ t_{K,max} - 2\pi < t_{1,min} - \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{a} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{b} \right) \end{cases} \quad (38)$$

Указанное условие (так же, как и в случае с выпуклостью) описывает отнюдь не все возможности появления несвязного множества разрешимости. Для рассмотренного выше примера данное условие выполняется.

Аналогичным образом можно найти достаточные условия несвязности множества  $W^*(0, t_1, W)$ : надо лишь вместо  $\hat{\Delta}$  рассматривать множество  $\hat{\Delta}^*$ , получающееся следующим образом:

$$\hat{\Delta}^* = \bigcup_{t \in [0, t^*]} \hat{\Delta}(t) \quad (39)$$

$$\hat{\Delta}(t) = ((\Delta(t) \cap [-2\pi(s+1), -2\pi s]) + 2\pi(s+1)) \cup \dots \cup ((\Delta(t) \cap [2\pi(k-1), 2\pi k]) - 2\pi(k-1))$$

(при достаточно больших натуральных  $s$  и  $k$ )

$$\Delta(t) = \Delta - t$$

Аналогично, если в приведенном условии вместо  $\hat{\Delta}$  или  $\hat{\Delta}^*$  рассматривать множество  $\hat{\Delta}(t)$ , то получится достаточное условие несвязности множества разрешимости  $W(t, t_1, W)$  в какой-то промежуточный момент времени  $t \in [0, t_1]$ .

Заметим, что выписанные достаточные условия невыпуклости и несвязности множества разрешимости для гибридной системы могут быть проверены численно. Действительно, выше уже была указана схема численного построения множества  $\Delta$ . Множество  $\hat{\Delta}$  может быть построено по  $\Delta$  при использовании формулы (25). Наконец, при найденном приближенно множестве  $\hat{\Delta}$  нужно найти максимальную длину отрезка, содержащегося в нем и сравнить ее с константой из правой части формулы (34), или же воспользоваться аналогичным образом формулой (35). Так же, на основе анализа отрезков, составляющих полученное множество  $\hat{\Delta}$ , при помощи формул (36) - (38) можно проверить, выполняется ли достаточное условие несвязности множества разрешимости гибридной системы. При исследовании свойств множества  $W^*(0, t_1, W)$  численный метод несколько усложняется из-за необходимости подсчета аппроксимации  $\hat{\Delta}^*$ . При этом надо использовать формулу (39), заменив в ней объединение по бесконечному множеству элементов на объединение по конечному их числу.

В заключение приведем примеры, иллюстрирующие различные возможности относительно связности и выпуклости множеств  $W(0, t_1, W)$  и  $W^*(0, t_1, W)$ . На рис. 44 изображено невыпуклое, но связанное множество разрешимости  $W(0, t_1, W)$  для гибридной системы при следующих параметрах:  $p = (4, -2)'$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 2$ ,  $r = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\mu = 3$ ,  $\lambda = 2$ ,  $t_1 = 8$ .

На рис. 45 изображено выпуклое множество разрешимости  $W(0, t_1, W)$  при следующих параметрах:  $p = (1, 0)'$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 10$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 10$ ,  $r = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $t_1 = 0.9$ .

В данном случае множество  $W^*(0, t_1, W)$ , подсчитанное при  $t^* = 0.3$ , совпадает с построенным множеством  $W(0, t_1, W)$ , а потому также является выпуклым.

На рис. 46 изображено несвязное и невыпуклое множество  $W^*(0, t_1, W)$  при следующих параметрах системы:  $p = (4, -2)'$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 2$ ,  $r = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\mu = 3$ ,  $\lambda = 2$ ,  $t_1 = 10$ ,  $t^* = 1$ .

**7. Заключение.** В данной работе рассмотрена задача поиска множества разрешимости в фиксированный момент времени, трубки разрешимости и множества разрешимости на некотором отрезке времени для гибридной системы, состоящей из двух систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами и прямоугольника на плоскости, на котором происходит смена системы дифференциальных уравнений. Были приведены два метода описания данных множеств: в виде объединения более простых множеств и при помощи функции цены. Кроме того, были рассмотрены методы получения внутренней и внешней аппроксимации к ним. В работе изучены такие свойства множеств разрешимости для гибридных систем, как выпуклость и связность. Приведены примеры ситуаций, когда множества разрешимости не являются связными или выпуклыми. Найденны достаточные условия отсутствия у этих множеств указанных двух свойств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurzhanski A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control, Birkhauser, 1997.
2. *Van der Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems (lecture notes in control and information sciences), Springer, 2000.

Кафедра системного анализа  
ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
19.03.2005 г.

**Рис. 44.** Невыпуклое, но связное множество разрешимости  $W(0, t_1, W)$ .

УДК 517.977.54

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПУАССОНОВСКИХ И ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2005 г. Е. С. Чумерина

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу управления движением математического маятника. Эволюция системы описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= y(t), \quad 0 < t \leq T \\ dy(t) &= -2\alpha y(t) dt - \omega^2 x(t) dt + u(t, x(t), y(t)) dt + \\ &+ \sigma_1 d\xi(t) + \sigma_2 d\eta(t), \end{cases} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь  $x(t)$ ,  $y(t)$  — фазовые координаты,  $u(t)$  — управление; слагаемое  $2\alpha y(t)$  описывает вязкое трение ( $\alpha \geq 0$ ); стандартный винеровский процесс  $\xi(t)$  и пуассоновский процесс  $\eta(t)$  с параметром  $\lambda$  взаимно независимы; константы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  задают интенсивность соответствующих возмущений; параметр  $\omega$  определяет собственную частоту маятника ( $\omega > 0$ ). Далее полагаем, что  $\omega > \alpha$ .

На управляющее воздействие наложено интегральное ограничение вида:

$$\int_0^T |u|^m dt \leq Q, \quad Q = \text{const} > 0. \quad (2)$$

**Рис. 45.** Выпуклое множество разрешимости  $W(0, t_1, W)$ .

**Рис. 46.** Несвязное и невыпуклое множество разрешимости  $W^*(0, t_1, W)$ .

Степень  $m$  — вещественное число вида  $m = 2p/(2s - 1)$ ,  $p, s = 1, 2, \dots$  и  $m > 1$ . Задачи с таким ограничением рассматривались в [1].

Целью управления является минимизация одного из двух представленных ниже функционалов, задающих потенциальную и кинетическую энергии системы соответственно:

$$J_1(u) = M[\omega^2 x^2(T)], \quad (3)$$

$$J_2(u) = M[y^2(T)]. \quad (4)$$

Здесь и далее символом  $M$  обозначено математическое ожидание случайных величин.

Введем новую переменную  $q(t) = \int_t^T |u|^m ds$ . Функция  $q(t)$  имеет смысл неизрасходованного ресурса управления. Вместо ограничения (2) далее будем рассматривать эквивалентное ему дифференциальное уравнение:

$$\dot{q} = -|u|^m, \quad q(0) \leq Q, \quad q(T) = 0. \quad (5)$$

Обозначим  $k = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ . Понизим порядок системы ([2]). Для этого введем новую переменную  $z$ :

$$z(t) = v_i(t)e^{-\alpha(T-t)}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$v_1(t) = \frac{\omega}{k} [y + \alpha x] \sin(k(T-t)) + \omega x \cos(k(T-t)),$$

если требуется минимизировать функционал  $J_1(u)$  (3), и

$$v_2(t) = y \cos(k(T-t)) - 1/k [\alpha y + \omega^2 x] \sin(k(T-t)),$$

если минимизируемым функционалом является  $J_2(u)$  (4). Тогда выполняются соотношения:  $z(T) = \omega x(T)$ , если  $i = 1$  и  $z(T) = y(T)$  при  $i = 2$ .

$$J_i^*(u) = M[z^2(T)], \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

$$dz(t) = f_i(t) [u(t, z(t)) dt + \sigma_1 d\xi(t) + \sigma_2 d\eta(t)], \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$f_1(t) = \frac{\omega}{k} e^{-\alpha(T-t)} \sin(k(T-t)), \quad (8)$$

$$f_2(t) = e^{-\alpha(T-t)} \left( \cos(k(T-t)) - \frac{\alpha}{k} \sin(k(T-t)) \right). \quad (9)$$

В новых переменных система (1), (2), (3) примет вид (7), (8), (5), (6), система (1), (2), (4) — вид (7), (9), (5), (6).

Если рассматривается задача управления движением материальной точки на прямой ( $\omega = 0$ ), то эволюция системы задается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= y(t), \\ dy(t) &= -2\alpha y(t) dt + u(t, x(t), y(t)) dt + \sigma_1 d\xi(t) + \sigma_2 d\eta(t). \end{cases} \quad (10)$$

На управление наложено ограничение (2). Требуется минимизировать один из двух видов функционалов:

$$J_3(u) = M[x^2(T)], \quad (11)$$

$$J_4(u) = M[y^2(T)]. \quad (12)$$

В задаче минимизации функционала  $J_3(u)$  (11) при  $\alpha = 0$  введем переменную  $z(t) = y(t)(T-t) + x(t)$ , в задаче минимизации функционала  $J_4(u)$  (12) определим  $z(t) = y(t)e^{-2\alpha(T-t)}$ . Тогда

$$J_i^*(u) = M[z^2(T)], \quad i = 3, 4. \quad (13)$$

$$dz(t) = f_i(t) [u(t, z(t)) dt + \sigma_1 d\xi(t) + \sigma_2 d\eta(t)], \quad i = 3, 4, \quad (14)$$

$$f_3(t) = T - t, \quad (15)$$

$$f_4(t) = e^{-2\alpha(T-t)}. \quad (16)$$

В новых переменных система (10), (2), (11) примет вид (14), (15), (5), (13), система (10), (2), (12) — вид (14), (16), (5), (13).

Обобщая представленные случаи, далее будем рассматривать следующую систему:

$$dz(t) = f(t)(u(t, z(t)) dt + \sigma_1 d\xi(t) + \sigma_2 d\eta(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (17)$$

$$dq = -|u|^m dt, \quad q(0) \leq Q, \quad q(T) = 0 \quad (18)$$

$$J(u) = M[z^2(T)] \rightarrow \min_{u(\cdot)}. \quad (19)$$

Функция  $f(t)$  — непрерывная функция на  $0 \leq t \leq T$ .

**Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.** Задача построения синтеза оптимального управления решается, если удастся найти единственное непрерывно-дифференцируемое решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана ([3]). Функцией Беллмана для системы (17) — (19) называется функция  $V(s, z, q)$ , равная нижней грани функционала (19) на траекториях системы (17), (18) при  $s \leq t \leq T$ ,  $z(s) = z$  и  $q(s) = q$  по всевозможным допустимым управлениям, т.е.

$$V(s, z, q) = \inf_{u(\cdot)} M[z^2(T)].$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для задачи (17) — (19) имеет вид ([4]):

$$V_t(t, z, q) + \inf_{u(\cdot)} [f(t)uV_z(t, z, q) - |u|^m V_q(t, z, q) + 1/2 f^2(t) \sigma_1^2 V_{zz} + \lambda [V(t, z + \sigma_2, q) - V(t, z, q)]] = 0,$$

$$V(T, z, q) = z^2.$$

Нижние индексы у функции  $V(t, z, q)$  означают соответствующие частные производные. Сделаем замену переменной  $\tau = T - t$  и обозначим  $f_1(\tau) = f(T - \tau)$ , тогда уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана примет вид:

$$V_\tau = \inf_{u(\cdot)} [f_1(\tau)uV_z - |u|^m V_q] + 1/2 f_1^2(\tau) \sigma_1^2 V_{zz} + \lambda [V(\tau, z + \sigma_2, q) - V(\tau, z, q)], \quad (20)$$

$$V(0, z, q) = z^2.$$

Найдем нижнюю грань выражения, стоящего в (20). Обозначим через  $u_0$  — управление, доставляющее эту нижнюю грань. Если  $V_q > 0$ , то нижняя грань не существует, поэтому  $V_q \leq 0$ . Если  $V_q = 0$ , то, как следует из (20), для существования конечной нижней грани необходимо, чтобы  $V_z = 0$ . В области, где  $V_q < 0$ ,

$$u_0 = - \left( \frac{|f_1(\tau)V_z|}{-mV_q} \right)^{\frac{1}{m-1}} \text{sign}\{f_1(\tau)V_z\}. \quad (21)$$

Тогда уравнение Беллмана переходит в следующее:

$$V_\tau = (m-1) \left( \frac{|f_1(\tau)V_z|}{-mV_q} \right)^{\frac{m}{m-1}} V_q + 1/2 f_1^2(\tau) \sigma_1^2 V_{zz} + \lambda [V(\tau, z + \sigma_2, q) - V(\tau, z, q)], \quad (22)$$

$$V(0, z, q) = z^2. \quad (23)$$

### Точное решение уравнения Беллмана ( $m > 1$ ).

**Теорема 1.** Решением уравнения Беллмана (22), (23) при  $m > 1$  является функция  $V(\tau, z, q)$ , определяемая следующим образом:

При  $z \geq q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau)$

$$V(\tau, z, q) = \left( z - q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) + \lambda \Sigma(\tau) \right)^2 + G(\tau), \quad (24)$$

где  $F(\tau) = \int_0^\tau |f_1(s)|^{\frac{m}{m-1}} ds$ ,  $\Sigma(\tau) = \sigma_2 \tau$  и  $G(\tau) = \lambda \sigma_2^2 \tau + \sigma_1^2 \int_0^\tau f_1^2(s) ds$ .

При  $z \leq -q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau)$

$$V(\tau, z, q) = \left( z + q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) + \lambda \Sigma(\tau) \right)^2 + G(\tau). \quad (25)$$

При  $-q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) < z < q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau)$   $V(\tau, z, q)$  является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} V_\tau &= 1/2 f_1^2(\tau) \sigma_1^2 V_{zz} + \lambda [V(\tau, z + \sigma_2, q) - V(\tau, z, q)] \\ V(0, z, q) &= z^2 \\ V(\tau, z, q) &= G(\tau) \quad \text{при } z = \mp q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \end{cases} \quad (26)$$

Оптимальное управление  $u_0$  в задаче (17) – (19) определяется по формуле:

$$u_0 = \begin{cases} -\frac{|f(t)|^{\frac{1}{m-1}} q^{\frac{1}{m}}}{F^{\frac{1}{m}}(\tau)} \operatorname{sign}\{f(t)\} & , \quad z \geq q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \\ +\frac{|f(t)|^{\frac{1}{m-1}} q^{\frac{1}{m}}}{F^{\frac{1}{m}}(\tau)} \operatorname{sign}\{f(t)\} & , \quad z \leq -q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \\ 0 & , \quad -q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) < z < \\ & < q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau). \end{cases} \quad (27)$$

**Доказательство.** Формулы (24), (25) проверяются непосредственной подстановкой в уравнение Беллмана (22), (23). Обозначим

$$\begin{aligned} D_1^m &= \left\{ (\tau, z, q) : z > q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \right\}, \\ D_2^m &= \left\{ (\tau, z, q) : z < -q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \right\}, \\ D_3^m &= \left\{ (\tau, z, q) : -q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) < z < q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \right\}, \\ D_4^m &= \left\{ (\tau, z, q) : z = q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \right\}, \\ D_5^m &= \left\{ (\tau, z, q) : z = -q^{\frac{1}{m}} F^{\frac{m-1}{m}}(\tau) - \lambda \Sigma(\tau) \right\}. \end{aligned}$$

На рис. 47 построены указанные области. Используя формулу (21) и тот факт, что  $f_1(\tau) = f(t)$ , получим

$$u_0 = -\frac{|f(t)|^{\frac{1}{m-1}} q^{\frac{1}{m}}}{F^{\frac{1}{m}}(\tau)} \operatorname{sign}\{f(t)\}, \quad (\tau, z, q) \in D_1^m, \quad (28)$$

$$u_0 = +\frac{|f(t)|^{\frac{1}{m-1}} q^{\frac{1}{m}}}{F^{\frac{1}{m}}(\tau)} \operatorname{sign}\{f(t)\}, \quad (\tau, z, q) \in D_2^m, \quad (29)$$

В  $D_4^m$  и  $D_5^m$   $V_q = 0$  и  $V_z = 0$ . Формула (28) сохраняет смысл на поверхности  $D_4^m$ , формула (29) – на поверхности  $D_5^m$ , так как возникающая при этом неопределенность в уравнении (21) может быть раскрыта. В области  $D_3^m$  положим  $u_0 = 0$ , значение функции Беллмана определяется из краевой задачи (26).

На рис. 48, 49, 50 построены графики функции Беллмана  $V(\tau, z, q)$  при фиксированном  $q$  для некоторых значений  $\tau$ .

**Постановка задачи при  $m = \infty$ .** Рассмотрим задачу управления движением математического маятника (1). На управление вместо интегрального ограничения (2) наложено ограничение вида:

$$|u| \leq Q, \quad Q = \operatorname{const} > 0. \quad (30)$$

Целью управления является минимизация одного из двух функционалов (3) или (4). Соответствующей заменой переменной, как это было сделано выше, система уравнений (1) приводится к виду (17) при необходимости минимизации функционала

$$J(u) = M[z^2(T)] \rightarrow \min_{u(\cdot): |u| \leq Q}. \quad (31)$$

Получим ограничение (30) как некоторый предельный случай рассмотренного ранее ограничения (2). Для этого введем обозначения:

$$q(t) = \int_t^T |u|^m ds < \infty,$$

**Рис. 47.** Области  $D_i^m$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  при  $m = 2$ ,  $Q = 100$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = \lambda = 1$ ,  $T = 10$ . Минимизируем  $J_2(u)$ .

**Рис. 48.** Функция Беллмана  $V(\tau, z, q)$  при  $q = 100$ ,  $\tau = 10$ . Минимизируем  $J_2(u)$ ,  $m = 2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \lambda = 1$ ,  $\sigma_2 = 1.24$ ,  $T = 10$ .



**Рис. 49.** Функция Беллмана  $V(\tau, z, q)$  при  $q = 100$ ,  $\tau = 5$ . Минимизируем  $J_2(u)$ ,  $m = 2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \lambda = 1$ ,  $\sigma_2 = 1.24$ ,  $T = 10$ .

**Рис. 50.** Функция Беллмана  $V(\tau, z, q)$  при  $q = 100$ ,  $\tau = 0$ . Минимизируем  $J_2(u)$ ,  $m = 2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \lambda = 1$ ,  $\sigma_2 = 1.24$ ,  $T = 10$ .

$$p_m = q^{\frac{1}{m}} = \left( \int_t^T |u|^m ds \right)^{\frac{1}{m}} < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m \stackrel{def}{=} p_\infty = \max_{t \leq s \leq T} |u(s)| = Q$$

Поэтому чтобы свести данную задачу к предыдущей, перейдем от переменной  $q$  к переменной  $p_m$  в уравнениях (21) – (23) и затем устремим  $m \rightarrow \infty$ . Так как  $p_m = q^{\frac{1}{m}}$ , то справедливы формулы:

$$\frac{\partial p_m}{\partial q} = \frac{1}{m} q^{\frac{1}{m}-1}$$

$$V_q = V_{p_m} \frac{\partial p_m}{\partial q} = \frac{1}{m} q^{\frac{1-m}{m}} V_{p_m}$$

Подставляя последнее равенство в уравнение Беллмана (22), получим

$$V_\tau = (m-1) \left( \frac{|f_1(\tau)V_z|}{-q^{\frac{1-m}{m}} V_{p_m}} \right)^{\frac{m}{m-1}} \frac{1}{m} q^{\frac{1-m}{m}} V_{p_m} + 1/2 f_1^2(\tau) \sigma_1^2 V_{zz} + \lambda [V(\tau, z + \sigma_2, p_m) - V(\tau, z, p_m)],$$

Выражение для управления (21) примет вид:

$$u_0 = - \left( \frac{|f_1(\tau)V_z|}{-q^{\frac{1-m}{m}} V_{p_m}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \text{sign}\{f_1(\tau)V_z\}.$$

Перейдем в последних двух равенствах к пределу при  $m \rightarrow \infty$ . Имеем  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m-1}{m} = 1$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} q^{\frac{1}{m}} = Q$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m-1} = 0$ . Окончательно получим

$$V_\tau = -Q|f_1(\tau)V_z| + 1/2 f_1^2(\tau) \sigma_1^2 V_{zz} + \lambda [V(\tau, z + \sigma_2) - V(\tau, z)], \quad (32)$$

$$V(0, z) = z^2. \quad (33)$$

$$u_0 = -Q \text{sign}\{f_1(\tau)V_z\}. \quad (34)$$

**Точное решение уравнения Беллмана при  $m = \infty$ .**

**Теорема 2.** Решением уравнения Беллмана (32), (33) является функция  $V(\tau, z)$ , определяемая следующим образом:

При  $z \geq QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau)$

$$V(\tau, z) = (z - QF(\tau) + \lambda\Sigma(\tau))^2 + G(\tau), \quad (35)$$

где  $F(\tau) = \int_0^\tau |f_1(s)| ds$ ,  $\Sigma(\tau) = \sigma_2\tau$  и  $G(\tau) = \lambda\sigma_2^2\tau + \sigma_1^2 \int_0^\tau f_1^2(s) ds$ .

При  $z \leq -QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau)$

$$V(\tau, z) = (z + QF(\tau) + \lambda\Sigma(\tau))^2 + G(\tau). \quad (36)$$

При  $-QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau) < z < QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau)$   $V(\tau, z)$  является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} V_\tau & = 1/2 f_1^2(\tau) \sigma_1^2 V_{zz} + \lambda [V(\tau, z + \sigma_2) - V(\tau, z)] \\ V(0, z) & = z^2 \\ V(\tau, z) & = G(\tau) \quad \text{при } z = \mp QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau) \end{cases} \quad (37)$$

Оптимальное управление  $u_0$  в задаче (17), (30), (31) определяется по формуле:

$$u_0 = \begin{cases} -Q \text{sign}\{f(t)\} & , \quad z \geq QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau) \\ +Q \text{sign}\{f(t)\} & , \quad z \leq -QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau) \\ 0 & , \quad -QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau) < z < QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau). \end{cases} \quad (38)$$

**Доказательство.** Формулы (35), (36) проверяются непосредственной подстановкой в уравнение Беллмана (32), (33). Обозначим

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(\tau, z) : z \geq QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau)\}, \\ D_2 &= \{(\tau, z) : z \leq -QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau)\}, \\ D_3 &= \{(\tau, z) : -QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau) < z < QF(\tau) - \lambda\Sigma(\tau)\}, \end{aligned}$$

На рис. 51 построены указанные области. Используя формулу (34) и тот факт, что  $f_1(\tau) = f(t)$ , получим

$$u_0 = -Q \operatorname{sign}\{f(t)\}, (\tau, z) \in D_1,$$

$$u_0 = +Q \operatorname{sign}\{f(t)\}, (\tau, z) \in D_2.$$

В области  $D_3$  положим  $u_0 = 0$ , значение функции Беллмана определяется из краевой задачи (37).

На рис. 52, 53, 54 построены графики функции Беллмана  $V(\tau, z)$  для некоторых значений  $\tau$ .

Используя численный метод моделирования решений стохастических систем линейных стационарных дифференциальных уравнений, предложенный в [5] и некоторые свойства пуассоновского процесса ([6]), были проведены численные реализации управлений системами. Полученные результаты приведены ниже.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноушко Ф.Л. Автономные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений. ПММ, 1971, т. 35, номер 5, с.333–342.
2. Братусь А.С., Волосов К.А. Точные решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления. Доклады РАН, 2002, т. 385, номер 3, с.319–322.
3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.
4. Параев Ю.И., Смагин В.И. Решение задач оптимального управления стохастическими объектами при воздействиях гауссовского и пуассоновского типов. Труды СФТИ им. В.Д.Кузнецова, 1973, выпуск 64, с.46–56.
5. Кузнецов Д.Ф., Кульчицкий О.Ю. Численное моделирование решений стохастических систем линейных стационарных дифференциальных уравнений. Электр. Ж. Дифференц. уравн. и проц. управл., 1998, номер 1, <http://www.peva.ru/journal>.
6. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Кафедра системного анализа  
ВМиК, МГУ

Поступила в редакцию  
19.03.2005 г.

**Рис. 51.** Области  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $Q = 100$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = \lambda = 1$ ,  $T = 10$ .  
Минимизируем  $J_2(u)$ .

**Рис. 52.** Функция Беллмана  $V(\tau, z)$ ,  $\tau = 5$ . Минимизируем  $J_2(u)$ ,  $Q = 100$ ,  
 $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \lambda = 1$ ,  $\sigma_2 = 1.24$ ,  $T = 5$ .

**Рис. 53.** Функция Беллмана  $V(\tau, z)$ ,  $\tau = 2.5$ . Минимизируем  $J_2(u)$ ,  $Q = 100$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \lambda = 1$ ,  $\sigma_2 = 1.24$ ,  $T = 5$ .

**Рис. 54.** Функция Беллмана  $V(\tau, z)$ ,  $\tau = 0$ . Минимизируем  $J_2(u)$ ,  $Q = 100$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \lambda = 1$ ,  $\sigma_2 = 1.24$ ,  $T = 5$ .

**Рис. 55.** Траектория системы (1) при отсутствии управления,  $m = 2$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ .

**Рис. 56.** Траектория системы (1) при  $m = 2$ ,  $Q = 200$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ . Минимизируем  $J_1(u)$ .

**Рис. 57.** Управление системы (1) при  $m = 2$ ,  $Q = 200$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ . Минимизируем  $J_1(u)$ .

**Рис. 58.** Траектория системы (1) при  $m = 2$ ,  $Q = 200$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ . Минимизируем  $J_2(u)$ .

**Рис. 59.** Управление системы (1) при  $m = 2$ ,  $Q = 200$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ . Минимизируем  $J_2(u)$ .

**Рис. 60.** Траектория системы (1) при  $m = \infty$ ,  $Q = 50$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ .



**Рис. 61.** Управление системы (1) при  $m = \infty$ ,  $Q = 50$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ . Минимизируем  $J_1(u)$ .

**Рис. 62.** Траектория системы (1) при  $m = \infty$ ,  $Q = 50$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ . Минимизируем  $J_2(u)$ .

УДК 517.977

*Андреев В.В. Исследование дискретной динамической системы “хищник–жертва” с учетом эффекта Олли // СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ2005. выпуск № 2. С. 2–20.*

*В статье приведен анализ дискретной динамической системы “хищник–жертва”, учитывающей эффект Олли. Исследование системы состояло в построении параметрического и фазового портретов, изучении бифуркаций, среди которых особое место занимают сильные 1:2, 1:3 и 1:4 резонансы, отыскании циклов, построении областей притяжения аттракторов, исследовании областей хаотического поведения системы.*

*Библиогр. 15 назв.*

УДК 517.977

*Брусникина Н.Б. Многошаговая аппроксимация последовательности множеств достижимости линейной автономной управляемой системы с гарантированной точностью // СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ2005. выпуск № 2. С. 21–28.*

*Решение многих задач управления связано с нахождением множеств достижимости динамических систем. В данной работе предлагается построение как единственной последовательности многогранников, аппроксимирующей последовательность множеств достижимости, так и двух последовательностей аппроксимирующих многогранников - гарантированно внутренней и гарантированно внешней. Аппроксимации множеств достижимости в заданные моменты времени строятся с гарантированной оценкой точности.*

*Библиогр. 17 назв.*

УДК 517.977

*Михайлова А.А. Многошаговая аппроксимация последовательности множеств достижимости линейной автономной управляемой системы с гарантированной точностью // СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ2005. выпуск № 2. С. 46–50.*

*Данная работа посвящена оценке остаточного члена в разложении Эджворта для функции распределения сумм абсолютно непрерывных случайных величин. Рассматриваются короткие асимптотически разложения для функций распределения нормированных (т.е. имеющих нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию) сумм независимых случайных величин.*

*Результат настоящей работы основан на работе [1], где рассматривается случай одинаково распределенных случайных величин, и обобщает его на случай, когда среди случайных величин выделены блоки одинаково распределенных с.в.*

*Библиогр. 3 назв.*

УДК 519.816.4:517.977.54

*Сорокин А.А. Гарантированное по исходам и рискам решение одной двухкритериальной динамической задачи // СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ2005. выпуск № 2. С. 51–61.*

*Explicit solution with respect to outcome and risks of one multi-criteria linear-quadratic dynamic problem under uncertainty, by means of the "Maple" programming system.*

*Библиогр. 8 назв.*

УДК 519.711

*Точилин П.А. О построении множества разрешимости для гибридной системы с линейной структурой // СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ2005. выпуск № 2. С. 73–82.*

*В данной работе рассматривается конкретная гибридная система с линейной структурой – совокупность двух систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и специального множества на плоскости, на котором происходит замена одной системы на другую.*

*Библиогр. 2 назв.*

УДК 519.711

*Чумерина П.А. // СБОРНИК СТАТЕЙ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ факультета ВМиК МГУ 2005. выпуск № 2. С. 83–91.*

*Рассматривается задача управления движением математического маятника, находящегося под воздействием случайных возмущений с учетом вязкого трения. При моделировании возмущений учитываются два взаимно независимых случайных процесса: винеровский и пуассоновский. На управляющее воздействие наложено ограничение, зависящее от имеющихся ресурсов. Целью управления является минимизация математического ожидания кинетической или потенциальной энергии к фиксированному моменту времени. В работе найдены точные решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для задачи и построен синтез оптимального управления.*

УДК

© 2005 г. П. А. Точилин

---

<i>Сдано в набор 16.07.2003 г.</i>	<i>Подписано к печати 18.09.2003 г.</i>	<i>Формат бумаги 60 × 88<sup>1</sup>/<sub>8</sub></i>		
<i>Офсетная печать</i>	<i>Усл. печ. л. 18.0</i>	<i>Усл. кр.-отт. 3.6 тыс.</i>	<i>Уч.-изд. л. 18.1</i>	<i>Бум. л. 9.0</i>
		<i>Тираж 199 экз.</i>		<i>Зак. 7603</i>

---

*Свидетельство о регистрации № 01284 от 24.06.92 г.  
в Министерстве печати и информации Российской Федерации  
Учредитель: Российская академия наук*

---

*Адрес издателя: 117997 Москва, Профсоюзная ул., 90  
Отпечатано в ППП “Типография “Наука”, 121099 Москва, Шубинский пер., 6*

**Рис. 63.** Управление системы (1) при  $m = \infty$ ,  $Q = 50$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 4$ . Минимизируем  $J_2(u)$ .