Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Студенческая олимпиада по математике
21 апреля 2012 года

2 курс

1. Пусть $f(x) > 0$ — непрерывная периодическая функция с периодом 1. При каких значениях a справедливо неравенство $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+a)}{f(x)} dx \geq 1$?

2. Найти
$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+n+1)} x^{n+\gamma},$$
где $\gamma > 0$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

3. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на вещественной прямой и для любого вещественного x верно равенство
$$\lim_{h \to \infty} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = 0,$$
то $f(x)$ — линейная функция.

4. Пусть G — открытое, не ограниченное сверху множество вещественных чисел. Существует ли такое $\alpha > 0$, что множество G содержит бесконечно много точек вида na, где $n \in \mathbb{N}$?

5. Доказать равенство $\displaystyle\sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} i_k = C_{m+k}^{k+1}$.

6. В квадратной матрице чётного порядка на главной диагонали стоят нули, а остальные элементы равны 1 или -1. Доказать, что эта матрица обратима.

7. Булева функция f называется универсальной, если любую линейную функцию (т.е. функцию вида $\alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n x_n$) можно однозначно задать на некотором подмножестве наборов функции f. Доказать, что универсальных функций трёх переменных не существует.

8. Обозначим через B_2 базис всех функций двух переменных. Доказать, что любая функция трёх переменных реализуется в базисе B_2 схемой, состоящей не более чем из четырёх элементов.